

Chapitre 5 – Résolution de problème : urnes d'Ehrenfest

Temps de retour à l'état initial dans le cas $N = 3$

L'étude détaillée du retour à l'état initial est complexe dès que N grandit. Cette étude a été effectuée dans le cas $N = 2$ au chapitre 4 (pages 134 et 135, partie D). Nous allons ici l'aborder dans le cas $N = 3$.

Les notations sont celles des parties B et C du problème 1 pages 170, 171, 172.

On note pour $n > 0$, Y_n la variable aléatoire qui compte les boules présentes dans B après n transferts (on pose $Y_0 = 0$).

1. Écrire une relation, valable pour tout entier n , entre X_n et Y_n .

2. On note T_0 la variable aléatoire égale, au plus petit $n > 0$ pour lequel $Y_n = 0$ et on pose $T_0 = 0$ si cet événement ne se réalise pas.

De la même façon, on note T_1 égale, dans le cas où $Y_0 = 1$, au plus petit $n > 0$ pour lequel $Y_n = 1$ et on pose $T_1 = 0$ si on ne revient pas à cet état initial.

On définit de même T_2 et T_3 .

a. T_0 admet-elle un nombre fini de valeurs ? Pour n impair, quelle est la valeur de $P(T_0 = n)$?

On admet que :
$$P(T_0 = 0) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{k=n} P(T_0 = 2k) \right) = P(\Omega) = 1.$$

b. Représenter la situation à l'aide d'un arbre construit jusqu'à $n = 4$ et établir les valeurs de $P(T_0 = 2)$, $P(T_0 = 4)$, $P(T_1 = 1)$ et $P(T_2 = 2)$.

c. Montrer que pour $k \geq 2$, $P(T_0 = 2k) = P(T_1 = 2k - 1)$ et que $P(T_3 = 2k - 1) = P(T_2 = 2k - 2)$.

d. Établir que : $P(T_2 = 2k) = \frac{2}{3} P(T_1 = 2k - 1) + \frac{1}{3} P(T_2 = 2k - 2)$.

e. En déduire la loi de T_2 puis celle de T_1 .

f. Montrer que pour tout $k \geq 2$, $P(T_0 = 2k) = \frac{4}{27} \left(\frac{7}{9}\right)^{k-2}$.

g. Établir que $P(T_0 = 0) = 0$. Interpréter ce résultat.

4. a. Dans le cas où T est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit $E(T)$ par :

$$E(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=0}^{i=n} P(T=i) \times i \right).$$

Écrire $E(T_0)$.

b. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x + \dots + x^m$ où m est un entier naturel non nul donné.

Exprimer $f(x)$ autrement pour $x \neq 1$.

En déduire, en dérivant f à l'aide des deux expressions obtenues, une

expression de $\sum_{i=0}^{m-1} ix^i$ pour $x \neq 1$.

En déduire $E(T_0)$ et interpréter ce résultat.