1. $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$ si et seulement si $z' = z$ c' est à dire $\frac{z-1}{z+1} = z$.
Pour $z \neq -1$, l'équation $\frac{z-1}{z+1} = z$ équivaut à $z - 1 = z^2 + z$ donc à $z^2 = -1$.
Les solutions de cette équation sont i et – i .
Par conséquent, les points invariants par f sont les points d'affixes i et – i.

2. a. On calcule $(z' - 1)(z + 1)$:

$$\begin{aligned}(z' - 1)(z + 1) &= \left(\frac{z-1}{z+1} - 1\right)(z + 1)\\ &= \left(\frac{(z-1)-(z+1)}{z+1}\right)(z + 1)\\ &= -\frac{2}{z+1}(z + 1)\\ &= -2 \quad \text{pour } z \neq -1\end{aligned}$$

On a donc bien $(z' - 1)(z + 1) = -2$ pour tout $z \neq -1$.

b. De la relation précédente, on déduit que, pour $z \neq -1$,
$|(z' - 1)(z + 1)| = |-2| = 2$.

Or, par propriété du module, $|(z' - 1)(z + 1)| = |z' - 1| \times |z + 1|$
Donc $|z' - 1| \times |z + 1| = 2$ pour tout $z \neq -1$.
Ceci signifie géométriquement que :

AM'×BM = 2 pour tout point M autre que B. (1)

On déduit aussi de cette relation, pour $z \neq -1$ et $z' \neq 1$,
$\arg((z' - 1)(z + 1)) = \arg(-2) = \pi \ (2\pi)$.

Par propriété des arguments,
$\arg((z' - 1)(z + 1)) = \arg(z' - 1) + \arg(z + 1) \ (2\pi)$
donc $\arg(z' - 1) + \arg(z + 1) = \pi \ (2\pi)$.
On peut remarquer que $z' = 1$ est impossible (car $z - 1 \neq z + 1$) donc
pour tout $z \neq -1$, $\arg(z' - 1) + \arg(z + 1) = \pi \ (2\pi)$.
Géométriquement, on en déduit que :

$(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{BM}) = \pi \ (2\pi)$ pour tout M différent de B. (2)

3. Si M appartient au cercle de centre B et de rayon 2, alors BM = 2 donc, d'après la relation (1), AM'×2 = 2 soit AM' = 1.
Si M appartient au cercle de centre B et de rayon 2, le point M' appartient au cercle de centre A et de rayon 1.

4. a. $p+1 = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ donc $|p+1| = \sqrt{1+3} = 2$.

Alors $p+1 = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$

Donc, sous forme exponentielle, $p+1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

Montrons que P appartient au cercle $\mathcal{C}$:

BP = $|\,p-b| = |\,p+1| = 2$. Par conséquent P appartient bien au cercle de centre B et de rayon 2.

b. Pour montrer que les points A, P' et Q sont alignés, déterminons $(\overrightarrow{\mathrm{AP'}},\overrightarrow{\mathrm{AQ}})$:

$(\overrightarrow{\mathrm{AP'}},\overrightarrow{\mathrm{AQ}}) = \arg\left(\frac{q-a}{p'-a}\right) = \arg(q-1)-\arg(p'-1) \quad (2\pi)$

Par la question 2.b., on sait que $\arg(z'-1)+\arg(z+1) = \pi \ (2\pi)$,
donc, en particulier, $\arg(p'-1)+\arg(p+1) = \pi \ (2\pi)$.

Par conséquent $(\overrightarrow{\mathrm{AP'}},\overrightarrow{\mathrm{AQ}}) = \arg(q-1)-\pi+\arg(p+1)$
$= arg((q-1)(p+1))+\pi \quad (2\pi)$
Sachant que $q = -\bar{p}$, on a
$(q-1)(p+1) = (-\bar{p}-1)(p+1) = -|p+1|^2$
Donc $\arg((q-1)(p+1)) = \pi \ (2\pi)$ puisque $(q-1)(p+1)$ est un réel négatif.

Par conséquent $(\overrightarrow{\mathrm{AP'}},\overrightarrow{\mathrm{AQ}}) = 0\ (2\pi)$.
Les points A, P' et Q sont donc alignés.
On peut même préciser que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AP'}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ étant colinéaires de même sens, le point P' appartient à la demi-droite [AQ].

Construction de P' :
Le point P étant placé, on place le point R d'affixe $\bar{p}$, symétrique de P par rapport à l'axe des abscisses, puis le point Q d'affixe $-\bar{p}$, symétrique de R par rapport *à* O. (Le point Q est aussi le symétrique de P par rapport à l'axe des ordonnées).
Le point P' appartient à la demi-droite [AQ).
De plus comme P appartient au cercle $\mathcal{C}$ (question 4.a.), le point P' appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre A et de rayon 1.
Le cercle $\mathcal{C}'$ et la demi-droite [AQ) ont un seul point commun, c'est donc le point P'.