**1. a.** $z' = z^2 - 4z = (x+\mathrm{i}y)^2 - 4(x+\mathrm{i}y) = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy - 4x - 4\mathrm{i}y$
d'où $z' = (x^2 - y^2 - 4x) + \mathrm{i}(2xy - 4y)$
qui est la forme algébrique de $z'$ puisque $x$ et $y$ sont réels.
On en déduit que :

$$\mathrm{Re}(z') = x^2 - y^2 - 4x, \text{ et } \mathrm{Im}(z') = 2xy - 4y.$$

**b.** $z'$ est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

$$2xy - 4y = 0 \Leftrightarrow 2y(x-2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = 2.$$

L'ensemble des points M d'affixe $z$ tels que $z'$ soit réel est donc la réunion des droites d'équations $y = 0$ et $x = 2$.

**2. a.** A' image de A :
$z_{\mathrm{A}} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$ donc $z_{\mathrm{A}'} = (9 - 3 - 4 \times 3) + \mathrm{i}(2 \times 3 \times \sqrt{3} - 4\sqrt{3})$ en utilisant la formule trouvée à la question 1.a.
Par suite, $z_{\mathrm{A}'} = -6 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

B' image de B :
De même, de $z_{\mathrm{B}} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, on déduit que
$z_{\mathrm{B}'} = (1 - 3 - 4) + \mathrm{i}(-2\sqrt{3} + 4\sqrt{3})$ , soit $z_{\mathrm{B}'} = -6 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.
Voir figure page 278.

**b.** G est le milieu de $[\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2]$ si et seulement si $z_{\mathrm{G}} = \frac{z_1 + z_2}{2}$ c'est-à-dire $2 = \frac{z_1 + z_2}{2}$ ce qui revient à $4 = z_1 + z_2$ donc à $z_2 = 4 - z_1$.

Déterminons alors l'affixe $z'_2$ de $f(\mathrm{M}_2)$ en fonction de $z_1$.

$z'_2 = {z_2}^2 - 4z_2 = (4 - z_1)^2 - 4(4 - z_1) = 16 - 8z_1 + {z_1}^2 - 16 + 4z_1$

$z'_2 = z_1^2 - 4z_1$ après simplification.

Or l'affixe $z_1{}'$ de $f(\mathrm{M}_1)$ est $z'_1 = z_1^2 - 4z_1$.

On en déduit que les points $f(\mathrm{M}_1)$et $f(\mathrm{M}_2)$ ont la même affixe donc sont confondus.

Revenons à la question a. :
On a obtenu, par le calcul, que $z_{\mathrm{A}'} = z'_{\mathrm{B}}$.

On remarque que $4 - z_{\mathrm{A}} = 4 - \left(3 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right) = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = z_{\mathrm{B}}$. Donc, d'après le résultat général que l'on vient de démontrer, G est le milieu du segment [AB], et les points $f(\mathrm{A})$ et $f(\mathrm{B})$ sont bien confondus.

**3. a.** OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{M'I}}$ .

Or ces vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même affixe, c'est-à-dire $z - 0 = -3 - z'$.

En remplaçant $z'$ par son expression en fonction de $z$,
$z = -3 - z' \Leftrightarrow z = -3 - z^2 + 4z \Leftrightarrow z^2 - 3z + 3 = 0.$

Donc OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.

**b.** On calcule le discriminant : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 = -3$.

Ce discriminant est négatif donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées : $\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Ecrivons ces solutions sous forme exponentielle :

$\left|\frac{3-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{1}{2}\left|3 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{9+3} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \frac{1}{2}2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ .

Donc $\frac{3-i\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{6}}$ sous forme exponentielle.

$\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$ étant le conjugué de $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$, on en déduit que $\frac{3+i\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Construisons les points images des solutions dans le plan complexe :

Soit C et D les points d'affixes respectives $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$.

On peut construire le point C en utilisant le fait que $(\vec{u}, \overrightarrow{OC}) = \arg\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ et que C a pour abscisse $\frac{3}{2}$ ; on obtient ainsi C comme point d'intersection de la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ et de la demi-droite tracée en vert sur le graphique ci-dessous.

On placera ensuite le point D comme symétrique de C par rapport à l'axe des abscisses.