1. Cherchons si deux des points M, N et P peuvent être confondus.

▪ Les points M et N :
M et N sont confondus si et seulement si $z = z^2$ c'est-à-dire $z(1-z) = 0$ ce qui équivaut à $z = 0$ ou $z = 1$.
Comme M est différent de O et de B, $z \neq 0$ et $z \neq 1$ donc M et N sont distincts.

▪ Les points N et P :
N et P sont confondus si et seulement si $z^2 = z^3$ c'est-à-dire $z^2(1-z) = 0$ ce qui équivaut à $z = 0$ ou $z = 1$.
On conclut comme dans le cas précédent que N et P sont distincts.

▪ Les points M et P :
M et P sont confondus si et seulement si $z = z^3$ c'est-à-dire $z(1-z^2) = 0$ ce qui équivaut à $z = 0$ ou $z = 1$ ou $z = -1$.
Comme M est différent de A, de O et de B, $z \neq -1$, $z \neq 0$ et $z \neq 1$ donc M et P sont distincts.

On a donc montré que M, N et P dont deux à deux distincts.

2. a. MNP est rectangle en P si et seulement si $PM^2 + PN^2 = MN^2$ ce qui s'exprime avec les nombres complexes sous la forme suivante :

$$|z_M - z_P|^2 + |z_N - z_P|^2 = |z_N - z_M|^2$$

soit

$$|z - z^3|^2 + |z^2 - z^3|^2 = |z^2 - z|^2 \quad (1)$$

En factorisant chaque expression et en utilisant la propriété du module d'un produit (égal au produit des modules) on obtient :

$$(1) \Leftrightarrow |z|^2|1-z|^2|1+z|^2 + |z|^4|1-z|^2 = |z|^2|z-1|^2$$

Comme $z \neq 0$ et $z \neq 1$, $|z|$ et $|1-z|$ sont non nuls donc on peut simplifier l'égalité précédente par $|z|^2|1-z|^2$, ce qui donne

$$(1) \Leftrightarrow |1+z|^2 + |z|^2 = 1.$$

On a donc montré que le triangle MNP est rectangle en P si et seulement si $|1+z|^2 + |z|^2 = 1$.

b. $|1+z|^2+|z|^2 = 1 \Leftrightarrow (1+z)(\overline{1+z}) + z\,\bar{z} = 1$
$\Leftrightarrow (1+z)(1+\bar{z}) + z\bar{z} = 1$
$\Leftrightarrow z + \bar{z} + 2z\bar{z} = 0.$

D'autre part,

$$\left(z+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow z\bar{z} + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\bar{z} = 0$$
$$\Leftrightarrow z + \bar{z} + 2z\bar{z} = 0.$$

On en déduit que $|1+z|^2+|z|^2 = 1 \Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}$.

c. $\left(z+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}$ s'écrit aussi $\left|z+\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$ ou encore $\left|z+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ car $\left|z+\frac{1}{2}\right|$ est positif ou nul.

On a montré que, pour un point M autre que O, A et B, le fait que le triangle MNP soit rectangle en P équivaut à $|1+z|^2+|z|^2 = 1$

puis à $\left(z+\frac{1}{2}\right)\overline{\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{4}$

soit encore à $\left|z+\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

qui s'écrit aussi $\Omega M = \frac{1}{2}$, en nommant Ω le point d'affixe $-\frac{1}{2}$.

Donc MNP est rectangle en P si et seulement si $\Omega M = \frac{1}{2}$.

L'ensemble $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$, privé de A et O.