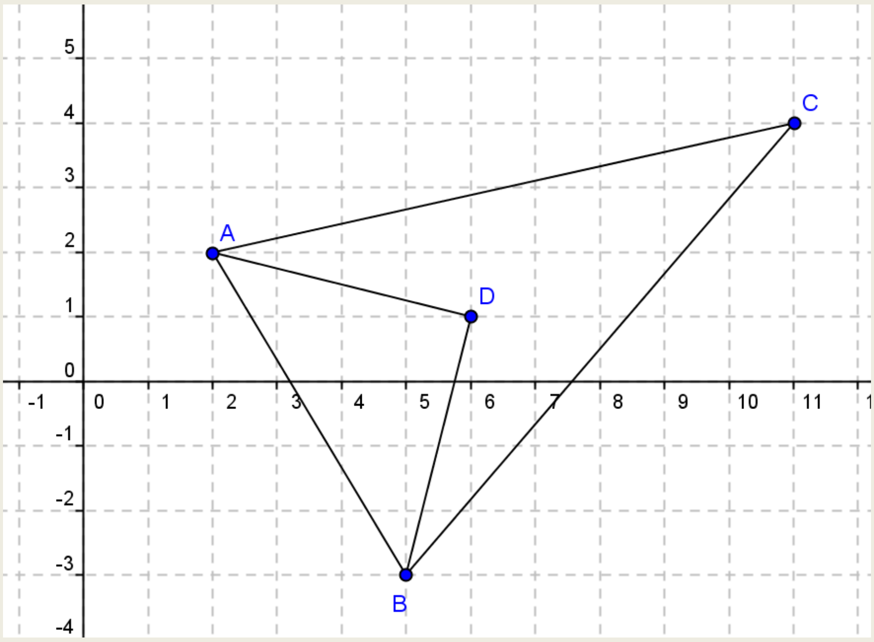
1. On place les points A, B, C et D dans le plan complexe, avec
$a = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + 2\mathrm{i}$.



Il semble que ABC soit isocèle en C ; montrons-le :

$\mathrm{CA} = |a - c| = |2 + 2\mathrm{i} - 11 - 4\mathrm{i}| = |-9 - 2\mathrm{i}| = \sqrt{81 + 4} = \sqrt{85}$

$\mathrm{CB} = [b - c| = |5 - 3\mathrm{i} - 11 - 4\mathrm{i}| = |-6 - 7\mathrm{i}| = \sqrt{36 + 49} = \sqrt{85}$

Donc ABC est bien isocèle en C.

Il semble que ABD soit rectangle en D ; montrons-le :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{DB}}, \overrightarrow{\mathrm{DA}}\right) = \arg\left(\frac{a-d}{b-d}\right) = \arg\left(\frac{2 + 2\mathrm{i} - 6 - \mathrm{i}}{5 - 3\mathrm{i} - 6 - \mathrm{i}}\right) = \arg\left(\frac{-4 + \mathrm{i}}{-1 - 4\mathrm{i}}\right)$$

$$= \arg\left(\frac{\mathrm{i}(4\mathrm{i}+1)}{-1-4\mathrm{i}}\right) = \arg(-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$$

Donc le triangle ABD est rectangle en D.

Remarque

De nombreuses autres méthodes peuvent être utilisées pour démontrer que ce triangle est rectangle (par exemple la réciproque du théorème de Pythagore ou le calcul d'un produit scalaire).

2. Le point M d'affixe z appartient à Δ si et seulement si $|z-a| = |z-b|$

ce qui équivaut à AM = BM.

L'ensemble Δ est donc la médiatrice du segment [AB].

Ayant C équidistant de A et B par la question 1., on sait que C appartient à Δ.

On a montré que $\frac{a-d}{b-d} = -\mathrm{i}$ donc $\left|\frac{a-d}{b-d}\right| = |-\mathrm{i}| = 1$.

Or $\left|\frac{a-d}{b-d}\right| = \frac{|a-d|}{|b-d|} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}}$.

De $\left|\frac{a-d}{b-d}\right| = 1$, on peut donc déduire que AD = BD.

Le point D est donc équidistant de A et B et de ce fait, D appartient également à Δ.

Remarque

On pourrait aussi traiter cette question analytiquement en posant $z = x + \mathrm{i}y$ avec x, y réels, et trouver une équation de Δ mais l'interprétation géométrique du module en termes de distances permet d'éviter ici tout calcul.