Chapitre 7 – Evaluer ses capacités – Exercice 149

1. Par la relation de Chasles sur les angles orientés,

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right)$$

d'où $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AC}\right)$

et, en utilisant le rappel fait dans l'énoncé :

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\arg(b-a) + \arg(c-a)\ \ (2\pi\,)$.

Par propriété des arguments, $\arg(c-a) - \arg(b-a) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\ \ (2\pi)$

donc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)\ \ (2\pi)$.

2. ABC est un triangle rectangle isocèle en A et direct donc

AB = AC et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$

On a alors $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{|c-a|}{|b-a|} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = 1$ et $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{2}\ \ (2\pi)$.

Le nombre complexe $\frac{c-a}{b-a}$ a donc pour module 1 et pour argument $\frac{\pi}{2}$.

Le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$ est i donc $\frac{c-a}{b-a} = \mathrm{i}$.

Par conséquent, $c - a = \mathrm{i}(b-a)$ d'où $c = \mathrm{i}(b-a) + a$

3. Application

Par la formule établie à la question 2, on a

$$c = \mathrm{i}\big(2 - 3\mathrm{i} - (1 - 2\mathrm{i})\big) + 1 - 2\mathrm{i}$$

soit $c = \mathrm{i}(1-\mathrm{i}) + 1 - 2\mathrm{i} = \mathrm{i} + 1 + 1 - 2\mathrm{i}$

donc $c = 2 - \mathrm{i}$.

On contrôle graphiquement que le triangle ABC ainsi obtenu est isocèle rectangle en A et direct :