1. Pour écrire $1-\mathrm{i}$ sous forme trigonométrique, on calcule son module :
$|1-\mathrm{i}| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$.

Solution 1 :
On met ce module en facteur :

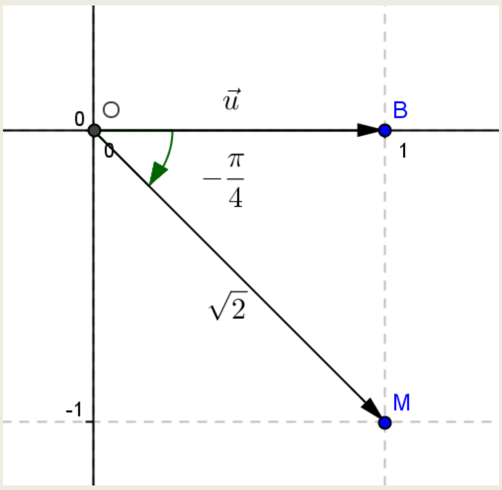
$$1-\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

qui est la forme trigonométrique de $1-\mathrm{i}$.

Solution 2 :
On détermine un argument θ de $1-\mathrm{i}$ grâce aux relations :
$\cos\theta = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{b}{|z|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
On a donc $\theta = -\frac{\pi}{4}$.
On écrit alors la forme trigonométrique de $1-\mathrm{i}$:

$$\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Remarque
On vérifie graphiquement que si M est le point d'affixe $1-\mathrm{i}$, dans le plan complexe muni du repère orthonormé directe $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ on a bien
$OM = \sqrt{2}$ et $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right) = -\frac{\pi}{4}\ (2\pi)$.



De même on met $\sqrt{3} - \ \mathrm{i}$ sous forme trigonométrique :

$|\sqrt{3} - \ \mathrm{i}\,| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2.$

Alors $\sqrt{3} - \mathrm{i} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$ qui est la forme trigonométrique de $\sqrt{3} - \ \mathrm{i}$.

2. Forme algébrique :
On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}} = \frac{(1-\mathrm{i})(\sqrt{3}+\mathrm{i})}{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(\sqrt{3}+\mathrm{i})} = \frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}-\mathrm{i}\sqrt{3}+1}{3+1} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + \frac{1-\sqrt{3}}{4}\ \mathrm{i}.$$

Forme trigonométrique :

Par la question 1, on a $\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2}e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}}{2e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}$

d'où $\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \ \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)$ sous forme trigonométrique.

On en déduit que $\frac{1+\sqrt{3}}{4} + \frac{1-\sqrt{3}}{4}\ \mathrm{i} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\ \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

puis, par unicité de l'écriture sous forme algébrique, que

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$

ce qui nous donne

$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \times\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

et $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \times\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

La fonction cosinus étant paire et la fonction sinus impaire, on en déduit que :

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Ayant $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$, on sait que $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (formules des angles associés α et $\frac{\pi}{2} - \alpha$)

On obtient donc finalement :

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Remarque

On peut contrôler à la calculatrice en considérant des valeurs approchées de $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ et $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.