

Chapitre 9 – Evaluer ses capacités – Exercice 147

Montrons que pour tous nombres complexes z_1 et z_2 ,

$$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|.$$

En utilisant le résultat rappelé dans l'énoncé,

$$|z_1 \times z_2|^2 = (z_1 \times z_2) \times \overline{z_1 \times z_2}.$$

Or $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$ par propriété du conjugué, donc

$$|z_1 \times z_2|^2 = (z_1 \times z_2) \times \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$$

$$|z_1 \times z_2|^2 = z_1 \times z_2 \times \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$$

$$|z_1 \times z_2|^2 = z_1 \times \bar{z}_1 \times z_2 \times \bar{z}_2$$

En utilisant à nouveau le résultat rappelé dans l'énoncé, on en déduit que

$$|z_1 \times z_2|^2 = |z_1|^2 \times |z_2|^2$$

$$\text{soit, } |z_1 \times z_2|^2 = (|z_1| \times |z_2|)^2$$

d'où, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ car ces deux nombres sont positifs ou nuls.

Montrons que pour tout nombre complexe z non nul, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$:

On applique le résultat précédent à $z_1 = z$ et $z_2 = \frac{1}{z}$, ce qui donne

$$\left|z \times \frac{1}{z}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z}\right|.$$

$$\text{Autrement dit } |1| = |z| \times \left|\frac{1}{z}\right|.$$

Comme z est non nul, son module est non nul et on peut déduire de l'égalité précédente que $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.