1. a. $\mathrm{I}(x) = [2t - \frac{1}{2}t^2]_1^x = \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 2x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}$

que l'on écrira plutôt en ordonnant : $\mathrm{I}(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$.

b. Pour $t \geq 1$, comme t est strictement positif,

$2 - t \leq \frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t - t^2 \leq 1$ (on multiplie chaque membre par t)

$\Leftrightarrow 0 \leq (t-1)^2$.

Comme $0 \leq (t-1)^2$ pour tout $t \geq 1$, on a aussi $2 - t \leq \frac{1}{t}$ pour tout $t \geq 1$.

Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{t}$ *et* $t \mapsto 2 - t$ sont continues sur $[1\,;x]$ pour $x \geq 1$.

Donc on peut « intégrer l'inégalité » $2 - t \leq \frac{1}{t}$ pour t allant de 1 à x

(propriété 4 page 238).

On obtient ainsi, pour tout $x \geq 1$,

$$\int_1^x (2-t)dt \leq \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

soit

$$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \leq \ln x.$$

2. On remarque que $h(x)$ n'est autre que I(x) trouvée à la question 1a.

a. $\int_1^4 h(x)dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{3}{2}x\right]_1^4$

$$= \left(-\frac{1}{6} \times 64 + 16 - \frac{3}{2} \times 4\right) - \left(-\frac{1}{6} + 1 - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \left(-\frac{64}{6} + 10\right) - \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{63}{6} + 10 + \frac{1}{2} = -\frac{21}{2} + 10 + \frac{1}{2} = 0.$$

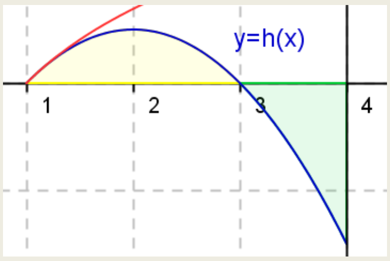
Interprétation graphique :

Idée : pour interpréter graphiquement ce résultat, on doit faire appel au lien entre aire et intégrale.
Graphiquement, il semble que h soit positive sur [0 ; 3] et négative sur [3 ; 4].
On doit donc considérer partager l'intégrale en deux intégrales pour pouvoir les interpréter en termes d'aire.

On lit graphiquement que $h \geq 0$ sur [0 ; 3] et $h \leq 0$ sur [3 ; 4].

Par la relation de Chasles, $\int_1^4 h(x)dx = \int_1^3 h(x)dx + \int_3^4 h(x)dx$ avec :

▪ $\int_1^3 h(x)dx$ égale à l'aire de la partie en jaune sur la figure ci-dessous, en unité d'aire puisque $h \geq 0$ sur [0 ; 3],
▪ $\int_3^4 h(x)dx$ égale à l'opposé de l'aire de la partie en vert sur la figure ci-contre, en unité d'aire, puisque $h \leq 0$ sur [3 ; 4].



De $\int_1^4 h(x)dx = 0$ on déduit que $\int_1^3 h(x)dx + \int_3^4 h(x)dx = 0$

Donc $\int_1^3 h(x)dx = - \int_3^4 h(x)dx$.

Ceci signifie que les parties du plan en jaune et en vert ont la même aire.

b. Pour $x > 0$, $g(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x, v(x) = \ln x$.

Donc g est dérivable sur]0 ; +∞[et $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

soit $g'(x) = 1 + \ln x$.

Par conséquent pour tout $x \geq 0, \ln x = g'(x) - 1$. Donc une primitive de la fonction ln sur]0 ; +∞[est la fonction $x \mapsto g(x) - x$, c'est-à-dire $x \mapsto x \ln x - x$.

Sur [1 ; 4], $\ln(x) \geq h(x)$ par la question 1.b. et ln et h sont continues donc $A = \int_1^4 \left(\ln(x) - h(x)\right)dx$ u.a. (propriété 5 page 240).

$A = \int_1^4 \ln x \, dx - \int_1^4 h(x)dx$ en u.a.

Comme $\int_1^4 h(x)dx = 0$, on obtient $A = \int_1^4 \ln x \, dx$.

De la primitive de la fonction ln trouvée précédemment, on déduit que $A = [x \ln x - x]_1^4$ en u.a. soit $A = (4 \ln 4 - 4) - (0 - 1) = 4 \ln 4 - 3$ en u.a.