1. La fonction f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et pour tout $x \geq 0$,
$f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = -x^2$ donc $f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = -2x\mathrm{e}^{-x^2}$.
Pour tout $x \geq 0$, $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

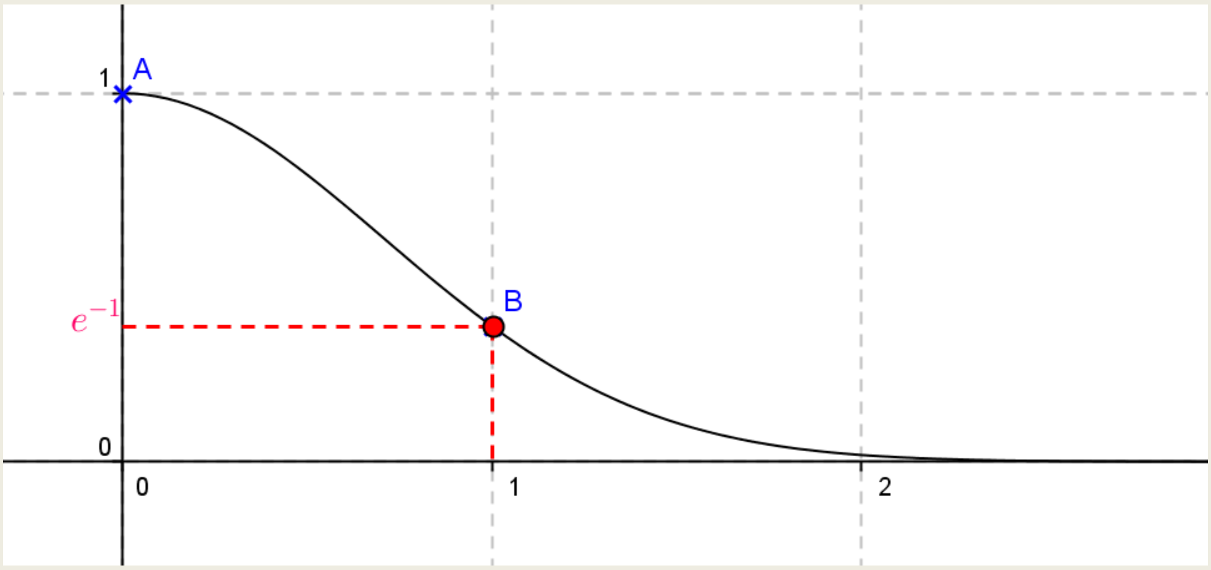
2. a. $f(0) = 1$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-1}$.

b. Quand x tend vers $+\infty$, $-x^2$ tend vers $-\infty$ donc e^{-x^2} tend vers 0 par théorème de composition.

On a donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

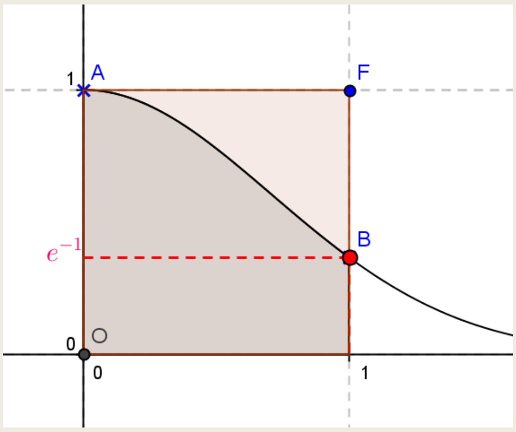
Graphiquement, on en déduit que la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

Allure de la courbe $\mathcal{C}$:

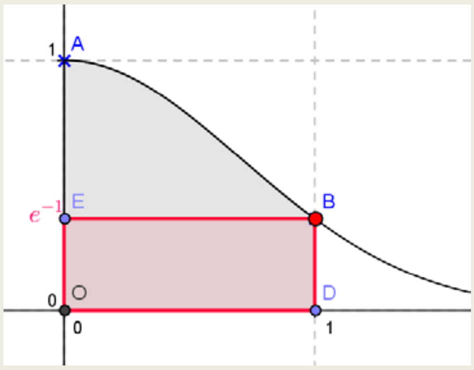


3. a. La fonction f est continue car dérivable et positive sur [0 ; 1] donc K est la mesure de l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan comprise entre la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ (partie en gris sur la figure ci-dessous)
Cette aire est inférieure à celle du carré de côté 1 et supérieure à celle du rectangle de dimensions 1 et e^{-1} représentés ci-dessous :

$\mathrm{K} \leq 1$



$\mathrm{K} \geq 1 \times \mathrm{e}^{-1}$



On a donc bien $\mathrm{e}^{-1} \leq \mathrm{K} \leq 1$.

b. Pour démontrer cet encadrement, on encadre f sur [0 ; 1] :
f est décroissante sur [0 ; 1] avec $f(0) = 1$ et $f(1) = \mathrm{e}^{-1}$ donc pour tout x de [0 ; 1], $\mathrm{e}^{-1} \leq f(x) \leq 1$.

Comme f est continue et $0 < 1$, on peut « intégrer cet encadrement » de 0 à 1 (propriété 4 page 238) :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-1} dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 1.\, dx$$

ce qui s'écrit encore :

$$\mathrm{e}^{-1} \int_0^1 dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 1.\, dx$$

On obtient $\mathrm{e}^{-1}[x]_0^1 \leq \mathrm{K} \leq [x]_0^1$, soit $\mathrm{e}^{-1} \leq \mathrm{K} \leq 1$.

4. a. On sait que pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$, on a $0 \leq x^2 \leq x \leq 1$.
Donc, en multipliant par -1, pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$,
on a $0 \geq -x^2 \geq -x \geq -1$.
Par croissance de la fonction exponentielle, pour tout x de (0 ; 1],

$$\mathrm{e}^0 \geq \mathrm{e}^{-x^2} \geq \mathrm{e}^{-x} \geq \mathrm{e}^{-1}.$$

On a donc établi que sur [0 ; 1], $\mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{-x^2} \leq 1$.

b. Les fonctions en jeu dans l'encadrement précédent étant continues, on peut « intégrer cet encadrement » de 0 à 1 (propriété 4 page 238) :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x} dx \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} dx \leq \int_0^1 1.\, dx$$

soit $[-\mathrm{e}^{-x}]_0^1 \leq \mathrm{K} \leq [x]_0^1$ ce qui nous donne $1 - \mathrm{e}^{-1} \leq \mathrm{K} \leq 1$.

5. a. *Méthode :* pour encadrer l'intégrale de f sur $\left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right]$, on encadre $f(x)$ sur cet intervalle puis on « intègre l'encadrement »

Pour $0 \leq k \leq n-1$, l'intervalle $\left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right]$ est inclus dans l'intervalle [0 ; 1].
Pour tout x tel que $\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$, on a $f\left(\frac{k}{n}\right) \geq f(x) \geq f\left(\frac{k}{n}\right)$ puisque f est décroissante sur [0 ; 1].

Comme f est continue et $\frac{k}{n} < \frac{k+1}{n}$, on « intègre cet encadrement » (propriété 4 page 238) :

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dx$$

ce qui s'écrit encore :

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \geq f\left(\frac{k+1}{n}\right) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx$$

c'est-à-dire :

$$f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \geq f\left(\frac{k+1}{n}\right)\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)$$

On obtient donc, pour $0 \leq k \leq n-1$:

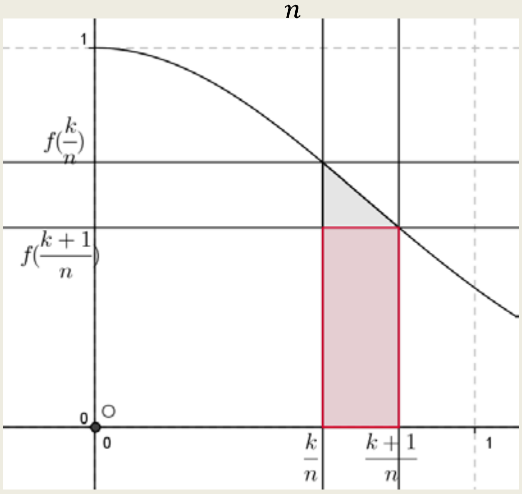
$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \geq \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

qui s'écrit encore :

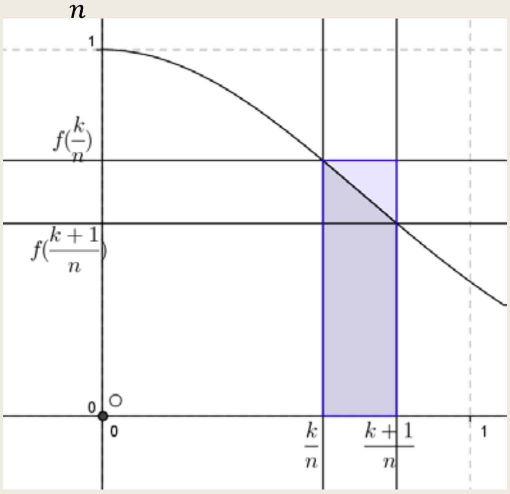
$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Remarque
Cet encadrement s'interprète graphiquement comme l'encadrement de l'aire de la partie du plan située entre la courbe $\mathcal{C}$, l' axe des abscisses et les droites d'équations $x = \frac{k}{n}$ *et* $x = \frac{k+1}{n}$ par les aires des rectangles de base $\left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right]$ et de hauteur respectives $f\left(\frac{k}{n}\right)$ *et* $f\left(\frac{k+1}{n}\right)$:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx$$



$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$



c. On écrit les encadrements obtenus précédemment pour k de 0 à $n-1$:

pour $k = 0$: $\quad \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f(0)$

pour $k = 1$: $\quad \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

$\vdots$

pour $k = n-1$: $\quad \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) \leq \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

En ajoutant membre à membre ces encadrements, et en utilisant la relation de Chasles pour les intégrales, on obtient :

$$\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + \ \dots f\left(\frac{n}{n}\right)\right) \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \frac{1}{n}\left(f(0) + \ \dots f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$$

c'est-à-dire :

$$u_n - \frac{1}{n} f(0) \leq \mathrm{K} \leq u_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right).$$

Ayant $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{n}{n}\right) = f(1) = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$, on en déduit que, pour $n \geq 2$,

$$u_n - \frac{1}{n} \leq \mathrm{K} \leq u_n - \frac{1}{n\mathrm{e}}.$$

Remarque

Ajouter membre à membre les encadrements obtenus à la question b. revient graphiquement à encadrer l'aire de la partie du plan comprise ente entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ par la somme des aires des « rectangles inférieurs » et la somme des aires des « rectangles supérieurs ».

d. L'encadrement $u_n - \frac{1}{n} \leq \mathrm{K} \leq u_n - \frac{1}{ne}$ a pour amplitude :

$\left(u_n - \frac{1}{n\mathrm{e}}\right) - \left(u_n - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{ne}$.

On cherche donc $n \geq 2$ tel que $\frac{1}{n} - \frac{1}{ne} \leq 10^{-4}$.

$\frac{1}{n} - \frac{1}{n\mathrm{e}} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) \leq 10^{-4} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) 10^4 \leq n$.

Comme $\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) 10^4 \approx 6321{,}2$, on en déduit qu'il faut prendre $n \geq 6322$ pour obtenir un encadrement de K d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-4}.

e. Algorithme

VARIABLES : u, n, k nombres

INITIALISATION :

  u prend la valeur 0

  n prend la valeur 6322

TRAITEMENT :

  Pour k de 0 à n Faire

    u prend la valeur $u + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

  FinPour

SORTIES :

  Afficher $u - \frac{1}{n}$

  Afficher $u - \frac{1}{ne}$