1. a. Les fonctions f_n sont continues et positives par énoncé et 0 < 1, donc (voir page 240), I_n est l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan située entre la courbe $\mathcal{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

b. D'après le graphique, $\mathrm{I}_1 \leq \mathrm{I}_2 \leq \mathrm{I}_3$. Il semble que la suite (I_n) soit croissante.

2. a. Pour montrer que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_n$ en $+\infty$, il faut montrer que la limite de f_n en $+\infty$ est égale à 1.

Or $f_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}.\frac{1}{(1+x)^n}$

Quand x tend vers $+\infty$,

- e^{-x} tend vers 0,
- $(1+x)^n$ tend vers $+\infty$ donc $\frac{1}{(1+x)^n}$ tend vers 0

donc $\mathrm{e}^{-x}.\frac{1}{(1+x)^n}$ tend vers 0

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$, ce qui prouve que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_n$ représentant f_n.

De plus pour tout n de $\mathbb{N}$ et pour tout x réel, $\mathrm{e}^{-x} > 0$ et $(1+x)^n > 0$ donc $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^n} > 0$ et par conséquent $f_n(x) < 1$.

La courbe $\mathcal{C}_n$ est donc en dessous de la droite d'équation $y = 1$.

b. Pour comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$, on étudie le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= 1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^{n+1}} - \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^n}\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^n} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^{n+1}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^n}\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^n}\left(\frac{x}{1+x}\right). \end{aligned}$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, et tout $x \geq 0$, $\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+x)^n} > 0$, $1 + x > 0$ et $x \geq 0$.

Donc $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$ c'est-à-dire $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

Remarque
On peut contrôler sur le graphique que $1 \geq f_3(x) \geq f_2(x) \geq f_1(x)$ au moins sur [0 ; 1].

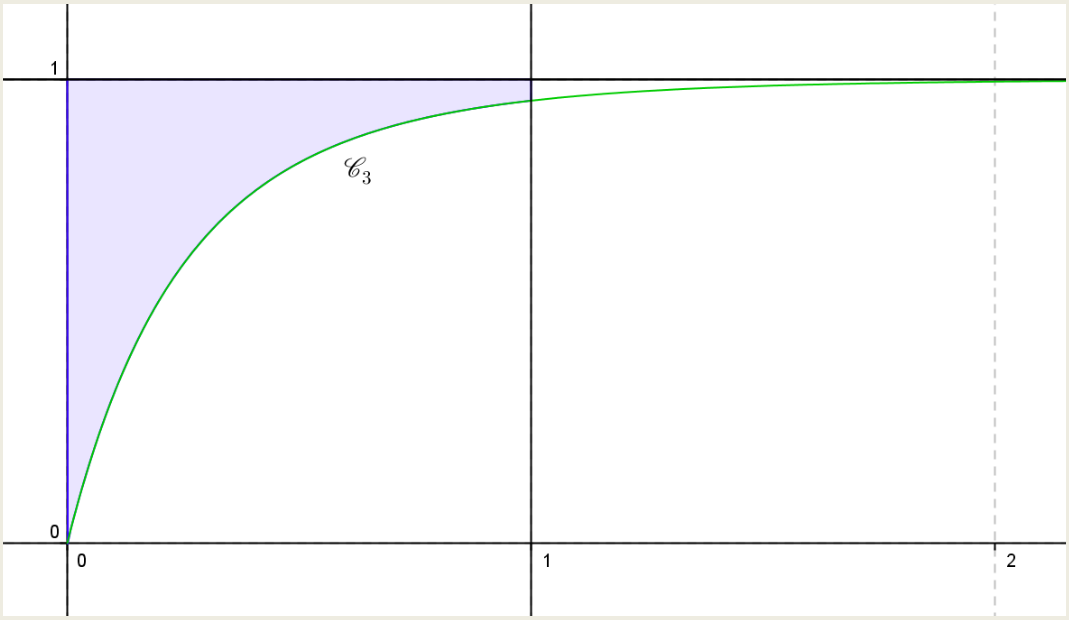
Les fonctions f_n et f_{n+1} sont continues sur [0 ; 1] (avec $0 < 1$) et $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ pour tout x de [0 ; 1].

En « intégrant cette inégalité » (propriété 4 page 238) de 0 à 1, on obtient :

$\int_0^1 f_{n+1}(x)dx \geq \int_0^1 f_n(x)dx$ c'est-à-dire $\mathrm{I}_{n+1} \geq \mathrm{I}_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

La suite (I_n) est donc croissante.

3. a. La partie du plan considérée est colorée en bleu.



.

b. Sur [0 ; 1], f_n est continue et $f_{n(x)} \leq 1$ donc (propriété 5 page 240)

$a_n = \int_0^1 (1 - f_n(x))dx$ en u.a.

c. On sait que pour tout n de ℕ et tout $x \geq 0$, $f_n(x) \leq 1$ donc $0 \leq 1 - f_n(x)$.

Démontrons l'autre inégalité : $1 - f_n(x) = \frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$.

Pour $x \geq 0, -x \leq 0$ donc $e^{-x} \leq 1$.

En multipliant par $1/(1+x)^n$, positif, on obtient $\frac{e^{-x}}{(1+x)^n} \leq \frac{1}{(1+x)^n}$

c'est-à-dire $1 - f_n(x) \leq \frac{1}{(1+x)^n}$.

On a donc établi que pour tout n de ℕ et pour tout $x \geq 0$,

$0 \leq 1 - f_n(x) \leq \frac{1}{(1+x)^n}$.

d. On a vu que $a_n = \int_0^1 \big(1 - f_n(x)\big)dx$.

En intégrant l'encadrement $0 \leq 1 - f_n(x) \leq \frac{1}{(1+x)^n}$, où les fonctions en jeu sont continues, de 0 à 1 $(0 < 1)$, on obtient :

$\int_0^1 0\, dx \leq \int_0^1 \big(1 - f_n(x)\big)dx \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^n} dx$ soit $0 \leq a_n \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^n} dx$.

Calculons $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^n} dx$ $pour\ n \geq 2$:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^n} dx = \int_0^1 (1+x)^{-n} dx = \left[\frac{1}{-n+1}(1+x)^{-n+1}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{n-1} . \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{n-1}$$

Par conséquent, pour tout $n \geq 2$, $\int_0^1 \frac{1}{(1+x)^n} dx \leq \frac{1}{n-1}$.

On a donc pour tout $n \geq 2$, $0 \leq a_n \leq \frac{1}{n-1}$.

Comme $\frac{1}{n-1}$ a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$, par le théorème des gendarmes, on déduit que la suite (a_n) a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.

.