1. a. $u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$ par définition de la suite (u_n).

Par linéarité de l'intégrale,

$$u_0 + u_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 1.dx$$

d'où $u_0 + u_1 = [x]_0^1 = 1$.

b. $u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \int_0^1 \frac{-u'(x)}{u(x)}\ dx$ avec $u(x) = 1 + e^{-x}$, strictement positif sur [0 ; 1].

Donc $u_1 = -\int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}dx = -\left[\ln\left(u(x)\right)\right]_0^1 = -(\ln(1+e^{-1}) - \ln(1+e^0))$

soit $u_1 = -\ln(1+e^{-1}) + \ln 2$ ou en transformant

$u_1 = \ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right) = \ln(\frac{2e}{e+1})$.

De la relation précédemment démontrée, $u_0 + u_1 = 1$, on déduit que

$u_0 = 1 - \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) = \ln e - \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) = \ln\left(\frac{e}{\frac{2e}{e+1}}\right) = \ln\left(e.\frac{e+1}{2e}\right) = \ln\left(\frac{e+1}{2}\right)$.

2. *Méthode : pour étudier le signe d'une intégrale, on étudie le signe de la fonction à intégrer sur l'intervalle d'intégration.*

Pour tout x de [0 ; 1], pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\mathrm{e}^{-nx} > 0 \text{ et } 1 - \mathrm{e}^{-x} > 0 \text{ donc } \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}} > 0\,.$$

Comme de plus $0 \leq 1$ et $\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}} > 0$ sur [0 ; 1], par la propriété 4 page 238 on déduit que $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,dx$ c'est-à-dire que $u_n \geq 0$ pour tout x réel.

3. a. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,dx$ par définition de la suite (u_n).

Par linéarité,

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} + \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right) dx = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x} + \mathrm{e}^{-nx}}{(1+\mathrm{e}^{-x})}\,dx$$

donc

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx-x} + \mathrm{e}^{-nx}}{(1+\mathrm{e}^{-x})}\,dx$$

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}(\mathrm{e}^{-x}+1)}{(1+\mathrm{e}^{-x})}\,dx$$

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,dx$$

On calcule alors $\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,dx$:

$\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx}\,dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{u(x)}\,dx$ avec $u(x) = -nx$.

On a $u'(x) = -n$ donc $u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = -n\mathrm{e}^{-nx}$.

Par suite, $\int_0^1 \mathrm{e}^{-nx} dx = -\frac{1}{n}\int_0^1 (-n\mathrm{e}^{-nx}) dx = -\frac{1}{n}\left[\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^1$

On en déduit alors que

$u_{n+1} + u_n = -\frac{1}{n}(\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^0)$ soit $u_{n+1} + u_n = \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$.

b. On sait que pour tout n, $u_n \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
De $u_{n+1} + u_n = \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$ on déduit alors que $u_n \leq \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

4. On sait que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$.

Quand n tend vers $+\infty$, e^{-n} tend vers 0 donc $1 - \mathrm{e}^{-n}$ tend vers 1 et par théorème d'opération, $\frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}$ tend vers 0.

Par le « théorème des gendarmes », on en déduit que la suite (u_n) a pour limite 0 quand n tend vers $+\infty$.