Partie A

Conseil

Représenter graphiquement la fonction g sur une calculatrice pour contrôler graphiquement les résultats obtenus au cours de l'étude.

• Limite en 0

On sait, par propriété que $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$, donc par théorème d'opération, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$.

• Limite en $+\infty$

On est face à une forme indéterminée (du type « $\infty - \infty$ »).

En mettant x en facteur : $g(x) = x(1 - \ln x)$

où $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$.

Par théorème d'opération, on en déduit que donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

• Sens de variation

Le sens de variation de g est donné par le signe de sa dérivée.

On a $g(x) = x - u(x)v(x)$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = ln\, x$.

Donc g est dérivable sur $]\,0\,;+\infty[$ avec :

$$g'(x) = 1 - (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) = 1 - (\ln x + x.\frac{1}{x}) = -\ln x$$

Donc $g'(x)$ est du signe opposé au signe de $\ln x$:

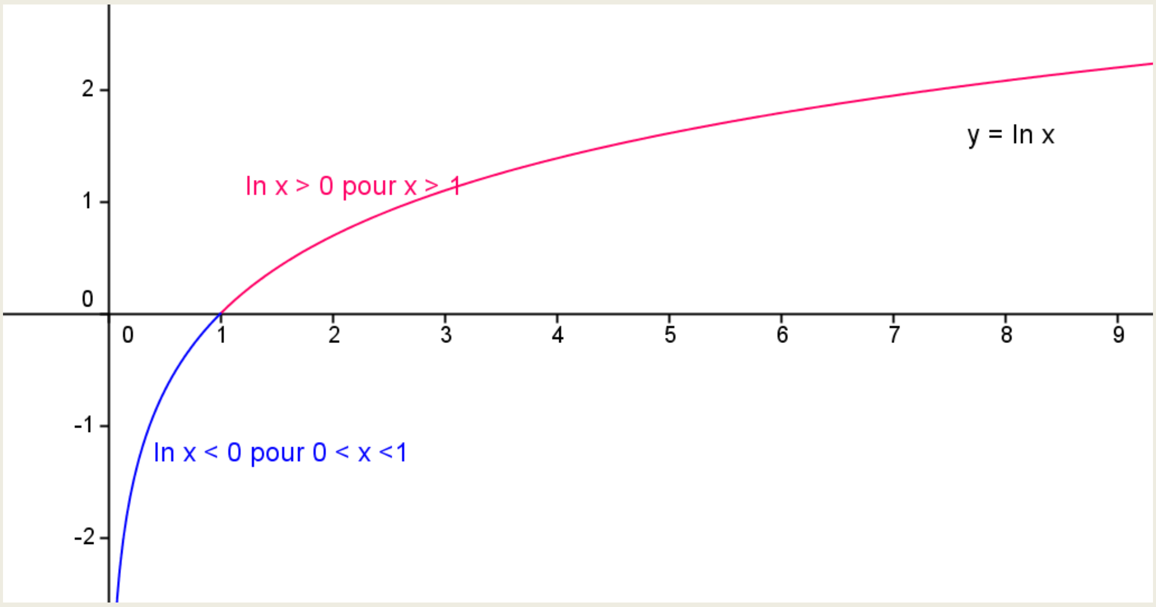
Si $0 < x < 1, \ln x < 0$ donc $g'(x) > 0$

Si $x = 1, \ln x = 0$ donc $g(x) = 0$

Si $x > 1, \ln x > 0$ donc $g'(x) < 0$

On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur $]0; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

Conseil
Bien connaître le signe de $\ln x$. Celui-ci s'obtient grâce à la stricte croissance de la fonction ln et à la valeur particulière $\ln 1 = 0$. On peut le retenir graphiquement :



Partie B

1. La suite (u_n) semble décroissante et convergente vers 0.
On peut émettre ces conjectures à l'aide d'un tableau de valeurs de la suite.

n	u_n
5	0.0474
6	8.6E-3
7	1.3E-3
8	1.7E-4
9	2E-5
10	2.2E-6
11	2E-7
12	1.8E-8

2. a. Pour tout $n \geq 1$, $v_n = \ln \frac{e^n}{n} = \ln e^n - \ln n^n = n - \ln n$.

b. On a $v_n = g(n)$ pour tout $n \geq 1$.

La fonction g est strictement décroissante sur [1 ; +∞[donc pour $n \geq 1$, on a : $1 \leq n < n+1 \Longrightarrow g(n) > g(n+1)$.

Autrement dit pour tout $n \geq 1, v_n > v_{n+1}$.

Par stricte croissance de la fonction exponentielle, de $v_{n+1} < v_n$ on déduit que $\mathrm{e}^{v_{n+1}} < \mathrm{e}^{v_n}$ c' est à dire $u_{n+1} < u_n$ pour tout $n \geq 1$.

La suite u est donc décroissante.

3.a. Pour tout $n \geq 1$, e^n et n sont strictement positifs donc $u_n > 0$.
De plus la suite u étant décroissante, pour tout $n \geq 1, u_n \leq u_1$.

Comme $u_1 = \mathrm{e}$ on a, pour tout $n \geq 1, 0 < u_n \leq \mathrm{e}$.

La suite (u_n) est donc bornée par 0 et e.

3.b. La suite (u_n) est décroissante et minorée donc elle converge.
On a, pour tout $n \geq 1, v_n = g(n)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} g(n) = -\infty$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

De $v_n = \ln u_n$ pour tout $n \geq 1$, on déduit que $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, par théorème de composition, on peut conclure que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

La suite u converge donc vers 0.