Chapitre 7 – Exercice guidé page 204

Partie A.

La démonstration est celle de la propriété 4 du cours, page 202.

Elle repose sur deux éléments :

- $\mathrm{e}^{\ln x} = x$ pour tout x réel strictement positif.
- si une fonction u est dérivable sur D, la fonction e^{u} est dérivable sur D et sa dérivée est $u'\mathrm{e}^{u}$ (propriété 5 page 70).

Partie B.

1. Pour $x \in \,]0;+\infty[$, $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$.

Le signe de $g'(x)$ est celui de $2x^2 - 1$ car $x > 0$.

On peut étudier le signe de $2x^2 - 1$ directement ou en utilisant la propriété du signe d'un trinôme de degré 2 ; les racines de $2x^2 - 1$ sont $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On en déduit le tableau de variations suivant (incomplet, sans les limites qui sont inutiles ici) :

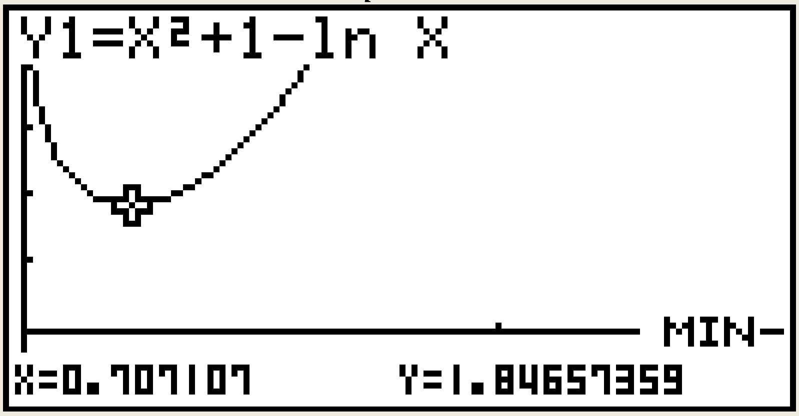
x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	↘	$g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	↗	

La fonction g admet donc pour minimum $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

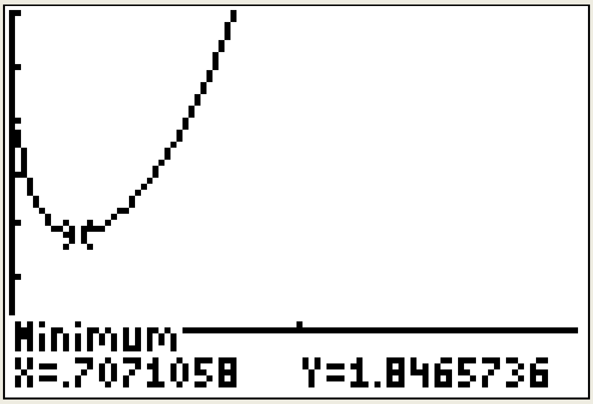
On calcule à la calculatrice : $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 1{,}8$, donc $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est strictement positif et, par suite, $g(x) > 0$ sur $]\,0\,;+\infty[$.

Conseil
Tracer la courbe représentant g sur la calculatrice pour contrôler les résultats obtenus.

Ci-dessous sur CASIO *Graph 35 avec l'outil* Min *du menu* G-Solv *(par* SHIFT F5*)*



Ci-dessous sur TI83, avec l'outil minimum *du menu* calculs *(par 2nde trace)*



2.a. Comme f est définie sur] 0 ; +∞ [, x tend vers 0 par valeurs supérieures à 0.

On a $(x) = x + (\ln x)\frac{1}{x}$.

De $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ on déduit par théorème d'opération que

$\lim\limits_{x \to 0} ((\ln x)\frac{1}{x} = -\infty$.

Par conséquent $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$.

Graphiquement, on en déduit que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentant f.

2.b. Quand x tend vers +∞ , $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par propriété donc, par théorème d'opération, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. c. On peut écrire $f(x) = x + \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = \ln x$ et $v(x) = x$.

La fonction f est donc dérivable sur] 0 ; +∞[avec, pour $x > 0$,

$f'(x) = 1 + \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2} = 1 + \frac{\frac{1}{x}.x - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$.

On a montré en question 1 que pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$.

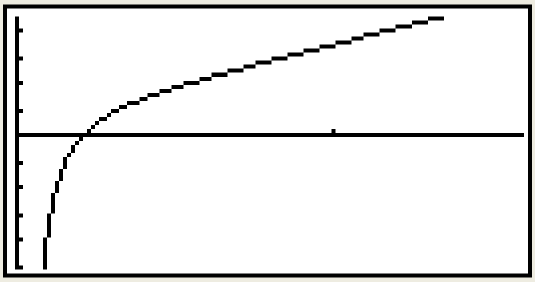
On en déduit donc que pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur] 0 ; +∞[.

On peut donc dresser son tableau de variations :

x	0		+∞
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖ -∞	↗	+∞

Conseils :
Vérifier la cohérence entre les limites et le sens de variation.
Tracer la courbe représentant f sur la calculatrice pour contrôler graphiquement les résultats trouvés au cours de l'étude.



2.d. La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en un point A est parallèle à la droite D si et seulement si elle a pour coefficient directeur 1.

Or la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse x_A a pour coefficient directeur $f'(x_A)$. On cherche donc x_A tel que $f'(x_A) = 1$.

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+1-\ln x}{x^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 - \ln x = x^2 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

Il y a donc un seul point de $\mathcal{C}$ en lequel la courbe possède une tagente parallèle à D, il s'agit du point de $\mathcal{C}$ d'abscisse e et d'ordonnée $f(e) = e + \frac{\ln e}{e} = e + \frac{1}{e}$.

Le point A est donc le point de coordonnées $\left(e\,;1+\frac{1}{e}\right)$.