1. Les théorèmes d'opérations sur les limites permettent de conclure :

$\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} -kx^2+1 = 1$ donc par théorème d'opération (addition), $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

2. *Démarche : quand x tend vers $+\infty$, les théorèmes d'opération conduisent à une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$", car $k > 0$. On essaie donc de transformer l'expression pour faire intervenir la forme indéterminée connue et rappelée dans l'énoncé.*

$f_k(x) = x\left(\frac{\ln x}{x} - kx\right) + 1$ pour $x > 0$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} - kx = -\infty$ puisque $k > 0$.

Par théorème d'opération on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - kx\right) += -\infty$

puis que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = -\infty$.

3. f_k est dérivable sur $]\,0\,;+\infty[$ comme somme de fonctions qui y sont dérivables et $f_k'(x) = \frac{1}{x} - k.2x = \frac{1-2kx^2}{x}$.

4. • Justifions la stricte croissance de f_k sur $]0\,;\frac{1}{\sqrt{2k}}]$:

Pour $0 < x \leq \frac{1}{\sqrt{2k}}$ on a $0 < x^2 \leq \frac{1}{2k}$ et par suite, $0 < 2kx^2 \leq 1$ car $k > 0$.

On a donc $1 - 2kx^2 \geq 0$ et $x > 0$ d'où $f_k'(x) \geq 0$ sur $]0\,;\frac{1}{\sqrt{2k}}]$.

De plus $f_k'(x)$ ne s'annule qu'en $\frac{1}{\sqrt{2k}}$.

La fonction f_k est donc strictement croissante sur $]0\,;\frac{1}{\sqrt{2k}}]$.

On vérifie de plus la valeur de $f_k\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)$:

$$f_k\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)-k\times\frac{1}{2k}+1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln(2k)=\frac{1-\ln(2k)}{2}.$$

• Justifions la stricte décroissance de f_k sur $[\frac{1}{\sqrt{2k}}\,;\,+\infty[$:

Pour $x\geq\frac{1}{\sqrt{2k}}$ on a $x^2\geq\frac{1}{2k}$ et donc $2kx^2\geq 1$ car $k>0$.

On a donc $1-2kx^2\leq 0$ et $x>0$ d'où $f_k'(x)\leq 0$ sur $]0\,;\frac{1}{\sqrt{2k}}]$.

De plus $f_k'(x)$ ne s'annule qu'en $\frac{1}{\sqrt{2k}}$.

La fonction f_k est donc strictement décroissante sur $[\frac{1}{\sqrt{2k}}\,;\,+\infty[$.

Remarque

On aurait aussi très bien pu étudier directement le signe de $f_k'(x)$, qui n'est autre que le signe de $1-2kx^2$, et retrouver les variations de f_k.

5. Le point A est le sommet de C_k donc on connaît ses coordonnées en fonction de k par la question précédente.

On en déduit que $\frac{1-\ln(2k)}{2}=\frac{1}{2}$ d'où $\ln(2k)=0$ soit $2k=1$ et donc $k=\frac{1}{2}$.

On a alors $x_A=\frac{1}{\sqrt{2k}}=1$.