Les affirmations justes sont les affirmations b et d.

Justifications :

a. L'affirmation est fausse.

On a la composée suivante : $x \overset{①}{\mapsto} \ln(x) = X \overset{②}{\mapsto} \ln(X) = \ln(\ln(x))$

Etape ① : $\ln(x)$ existe si et seulement si $x > 0$.

Etape ②: ln (X) existe si et seulement si $X > 0$, autrement dit $\ln(x) > 0$ ce qui équivaut à $x > 1$.

Pour $0 < x \leq 1$, on ne peut pas calculer $\ln(\ln(x))$ car $\ln(x) \leq 0$.

Donc f n'est pas définie sur tout l'intervalle]0 ; +∞[mais seulement sur

] 1 ; +∞[.

b. L'affirmation est vraie.

Pour $x \geq \mathrm{e}^5$, $\ln(x) \geq \ln(\mathrm{e}^5)$ soit $\ln(x) \geq 5$ par croissance de la fonction ln sur] 0 ; +∞[.

Donc $\ln(\ln(x)) \geq \ln(5)$ à nouveau par croissance de la fonction ln.

Or $\ln(5) \approx 1{,}6$, donc pour $x \geq \mathrm{e}^2$, $f(x) \geq 1$.

c. L'affirmation est fausse.

On a vu que la fonction f n'est pas définie sur D, donc sa dérivée non plus.

d. L'affirmation est vraie

On a $f(x) = \ln\big(u(x)\big)$ avec $u(x) = \ln(x)$.

La fonction u est dérivable sur]1 ; +∞[et y est strictement positive donc la fonction f est dérivable sur] 1 ; +∞[.

On a $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \frac{1}{x\ln(x)}$.

La courbe représentant f admet en son point d'abscisse e, pour tangente la droite T d'équation $y = f'(\mathrm{e})(x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$.

Or $f'(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}\ln(\mathrm{e})} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et $f(\mathrm{e}) = \ln(\ln(\mathrm{e})) = \ln(1) = 0$.

Donc T a pour équation $y = \frac{1}{\mathrm{e}}(x - \mathrm{e}) = \frac{x-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}$.