1.a . Limite en 0 :

La fonction f étant définie sur $]0\,;+\infty[$, quand x tend vers 0, c'est par valeurs supérieures.

Alors $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 1 + \frac{1}{x} = +\infty$

Or $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

donc par théorème de composition,

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$.

Par théorème d'opération, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$.

Limite en $+\infty$:

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$

Or $\lim\limits_{X \to 1} \ln(X) = \ln(1) = 0$

donc par théorème de composition,

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$

Par théorème d'opération, on en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

b. Le sens de variation de f est donné par le signe de sa dérivée.

$f(x) = \ln\big(u(x)\big) - x$ avec $u(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

La fonction u est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ est y est strictement positive, donc la fonction $\ln(u)$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et la fonction f aussi.

On a alors $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} - 1 = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} - 1 = -\dfrac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} - 1$.

De $x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 > 0$ pour tout $x > 0$, on déduit que $f'(x)$ est la somme de deux termes toujours strictement négatifs donc $f'(x) < 0$. La fonction f est donc strictement décroissante sur]0 ; +∞[.

c. On peut dresser le tableau de variation de la fonction f :

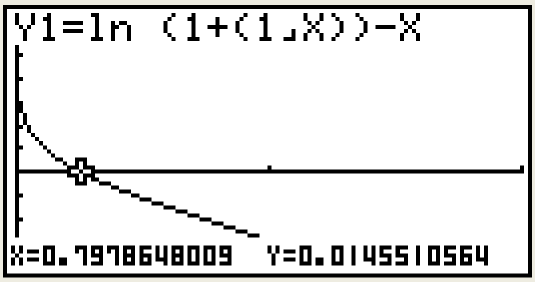
x	0	$?$	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	0	$-\infty$

Conseil : vérifier la cohérence de ce tableau. On pensera à a contrôler graphiquement les résultats de cette question 1 en traçant la courbe représentative de f sur une calculatrice.

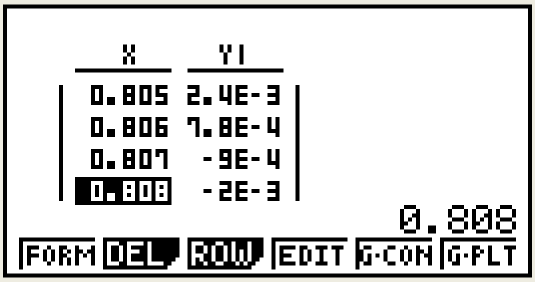
On sait que f est dérivable donc continue sur]0 ; +∞ [et strictement décroissante sur cet intervalle.

Comme 0 appartient à $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) ; \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)\right[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans]0 ; +∞[.

On peut conjecturer une valeur approchée à la calculatrice, graphiquement par exemple :



Par balayage, on obtient :



X	Y1
0.805	2.4E-3
0.806	7.8E-4
0.807	-9E-4
0.808	-2E-3

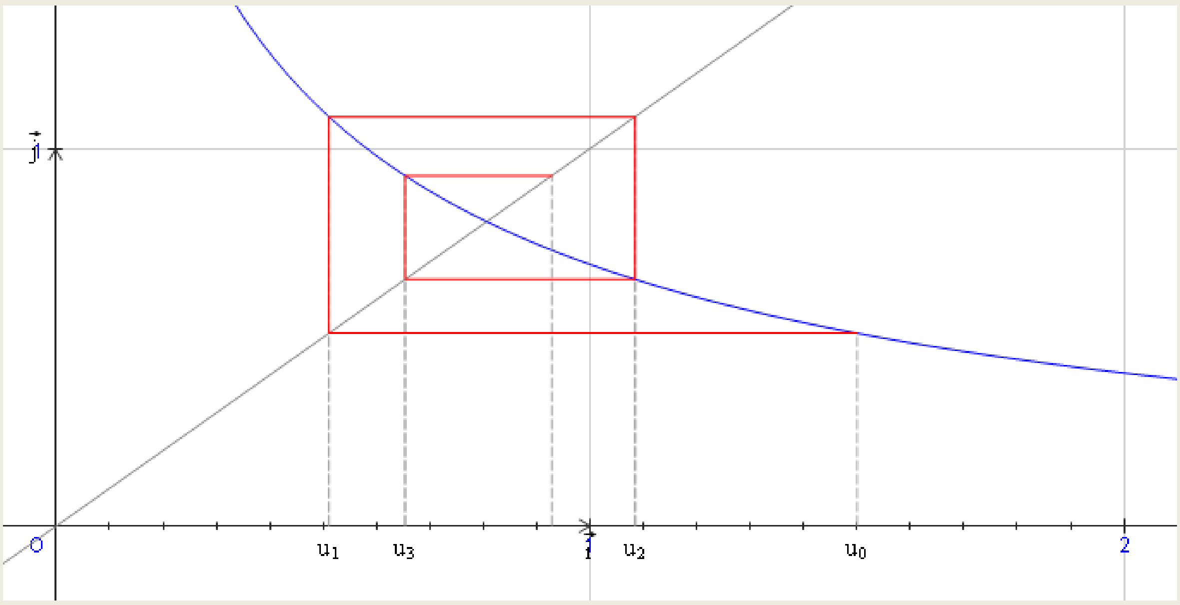
0.808

FORM DEL ROW EDIT G·CON G·PLT

Donc $f(0{,}806) > 0 > f(0{,}807)$ d'où, par stricte décroissance de f,

$0{,}806 < \alpha < 0{,}807$. On a donc (par exemple) $\alpha \approx 0{,}806$ à 0,001 près.

2. a.



b. Le graphique permet de conjecturer l'affirmation (2) et l'affirmation (3) avec $\ell \approx 0{,}8$.

c. Si la suite (u_n) converge vers $\ell > 0$, alors u_{n+1} tend aussi vers ℓ.

Mais $\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers $\ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right)$, donc u_{n+1} tend vers $\ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right)$.

Par unicité de la limite, on en déduit que $\ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right) = \ell$.

Autrement dit ℓ est un nombre strictement positif tel que

$\ln\left(1+\frac{1}{\ell}\right) - \ell = 0$, c'est-à-dire $f(\ell) = 0$.

Or l'unique réel strictement positif dont l'image par f est 0 est α par la question 1. On en déduit que $\ell = \alpha$.