Chapitre 6 – Exercice guidé page 175

1. $f(x) = x(\mathrm{e}^{-x} + k)$ pour tout x réel.
O suppose ici k positif ou nul.
Alors $\mathrm{e}^{-x} + k \geq \mathrm{e}^{-x}$ pour tout x réel.
Or $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout x réel, donc $\mathrm{e}^{-x} + k \geq \mathrm{e}^{-x} > 0$ et *a fortiori*, $\mathrm{e}^{-x} + k > 0$.
On en déduit que $f(x)$, produit de x par un réel strictement positif, est du signe de x dans le cas où $k \geq 0$.

2. 1er cas : si $k < 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} + k = k \text{ , strictement négatif}\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

2e cas : si $k = 0$

$f_0(x) = x\mathrm{e}^{-x}$ donc par la propriété (propriété 5 page 172) , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

3e cas : si $k > 0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} + k = k \text{ strictement positif}\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

3. a. $f_k'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} + k$ et $f_k''(x) = (x-2)\mathrm{e}^{-x}$.
b. Le sens de variation de la fonction f_k' est donnée par le signe de sa dérivée f_k''.
Or $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout x réel, donc $f_k''(x)$ est du signe de $x - 2$.
Sur]-∞ ; 2], on a donc $f_k''(x) \leq 0$, f_k'' ne s'annulant qu'en 2, donc f_k' est strictement décroissante sur]-∞ ; 2].
Sur [2 ; +∞[, $f_k''(x) \geq 0$, f_k'' ne s'annulant qu'en 2, donc f_k' est strictement croissante sur [2 ; +∞[.

c. Limite en $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$ par théorème d'opération.

On en déduit la limite de la différence : $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} - xe^{-x} = +\infty$ par théorème d'opération.

Comme k est une constante, on en déduit que $\lim_{x\to-\infty} f_k'(x) = +\infty$.

Limite en $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ (propriété 5 page 172)

Par théorème d'opération, on obtient $\lim_{x\to+\infty} f_k'(x) = k$.

On peut maintenant dresser le tableau de variation de la fonction $f_k{}'$:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f_k'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$k - e^{-2}$	$\nearrow$	k

4. La courbe rose est la seule courbe d'une fonction qui n'est pas du signe de x tout le temps (par exemple elle est positive pour $x = -1$).
D'après la question 1, on en déduit que cette courbe rose correspond à la seule valeur négative de k proposée, soit $k = -4$.

Pour $k = 0$, d'après le tableau de variations de f_k', on sait que $f_k'(x) < 0$ sur $[2\ ; +\infty\ [$. Donc la fonction est décroissante sur $[2\ ; +\infty\ [$.
Seule la courbe marron correspond.

On remarque qu'elle semble bien admettre l'axe des abscisses pour asymptote conformément à la limite nulle trouvée dans ce cas en $+\infty$ à la question 2.

Les deux dernières courbes se distinguent par les variations des fonctions qu'elles représentent. Examinons les deux cas :

Pour $k = 0{,}1$:

x	$-\infty$		a		2		b		$+\infty$
$f_k'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\approx$ -0,03	$\nearrow$	0	$\nearrow$	0,1
$f_k'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
f_k		$\nearrow$			$\searrow$			$\nearrow$	

Pour $k = 1$:

x	$-\infty$		a		2		$+\infty$
$f_k'(x)$	$+\infty$	$\searrow$			$\approx 0{,}86$	$\nearrow$	1
$f_k'(x)$				$+$			
f_k				$\nearrow$			

La courbe verte correspond donc à $k = 1$, la courbe violette *à* $k = 0{,}1$.