1. a. $f(x)$se présentant comme un produit, on cherche la limite de chacun des facteurs quand x tend vers 0 en restant dans l'ensemble de définition de f c'est-à-dire quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0$ avec x^2 qui est toujours positif donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ par théorème de composition.

Remarque

On peut penser à un changement de variable : $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^X$ avec $X = \frac{1}{\mathrm{x}}$.

Par théorème d'opération, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$.

b. On examine de même chaque facteur :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^0 = 1.$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Donc par théorème d'opération, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

c. De $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$, on déduit que la courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour asymptote verticale quand x tend vers 0.

De $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, on déduit que l'axe des abscisses est asymptote horizontale de $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

2.a. On a $f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = \frac{1}{x^2}$et $v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur $]\,0\,;+\infty[$ donc f l' est également.

De $u(x) = x^{-2}$ on déduit que $u'(x) = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

De $v(x) = \mathrm{e}^{w(x)}$ avec $w(x) = \frac{1}{x}$, on déduit que :

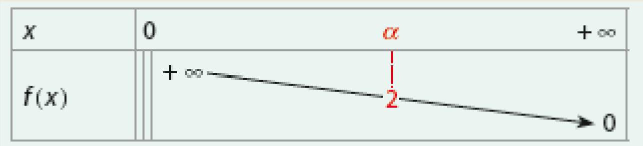
$$v'(x) = w'(x)\mathrm{e}^{w(x)} = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}.$$

On obtient donc :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -\frac{2}{x^3}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}.\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x+1)$$

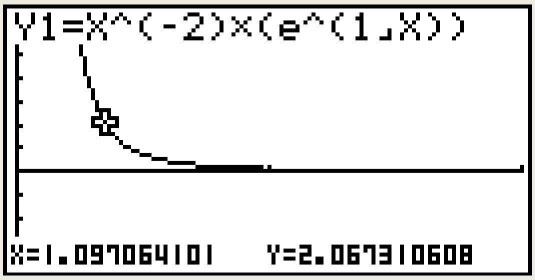
b. Pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x^4} > 0$, $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > 0$ et $2x + 1 > 0$.
Donc $f'(x) < 0$ sur] 0 ; +∞[donc f est strictement décroissante sur] 0 ; +∞[.

c. La fonction f est dérivable donc continue sur]0 ; +∞[et strictement décroissante sur] 0 ; +∞[.

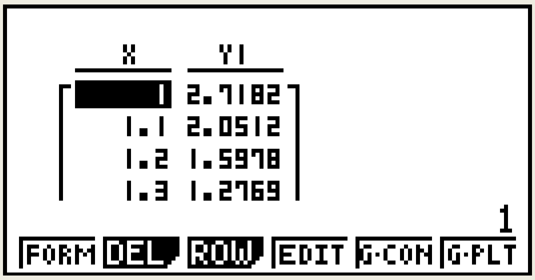


Comme 2 appartient à l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,;\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)\right[$ c'est-à-dire l'intervalle]0 ; +∞[, l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution dans] 0 ; +∞[.

On peut commencer par conjecturer une valeur approchée de α à la calculatrice, par exemple à l'aide de la courbe représentative de f : $x \approx 1{,}09$.

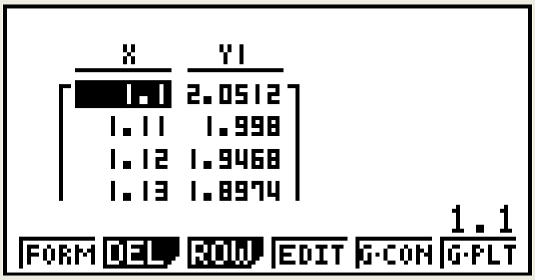


En effectuant un balayage à partir de 1 avec un pas de 0,1, on obtient la table de valeurs suivante :



De $f(1{,}1) > 2 > f(1{,}2)$ on déduit par stricte décroissance de f que $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$.

Avec un pas de 0,01 à partir de 1,1, on obtient la table de valeurs :



On en déduit de même que $1{,}1 \leq \alpha \leq 1{,}11$ d'où $\alpha \approx 1{,}11$ au centième près.