1. Limite en $+\infty$:

On a $f(x) = xe^{-x} \times \frac{1}{x^2+1}$

Par la propriété 5 page 172, $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$.

Par théorèmes d'opérations, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$.

Par conséquent $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ par théorème de produit.

On en déduit que la courbe représentative de la fonction f admet l'axe des abscisses pour asymptote en $+\infty$.

2. Étudions la fonction g :

La fonction g étant une fonction polynôme, sa limite en $+\infty$ est celle de son terme de plus haut degré x^3. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

De plus g est dérivable et $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1$, somme de 1 et de termes tous positifs ou nuls quand $x \geq 0$. Donc $g'(x) > 0$ sur $[0 ; +\infty[$.
On en déduit que g est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

De plus g est continue car dérivable sur $[0 ; +\infty[$.
Comme $g(0) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, 0 appartient à l'intervalle $[g(0) ; \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)[= [-1 ; +\infty[$.

Conseil : s'aider du tableau de variations complété ci-dessous :

x	0	?	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

L'équation $g(x) = 0$ a une unique solution dans $[0 ; +\infty[$.

3.a. On a $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = xe^{-x}$ et $v(x) = x^2 + 1$.
La fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et $f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$
avec $u'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$et $v'(x) = 2x$.
Par conséquent :

$$f'(x) = \frac{e^{-x}(1-x)(x^2+1) - xe^{-x}.2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^{-x}(\ (1-x)(x^2+1) - 2x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^{-x}(x^2+1-x^3-x-2x^2)}{(x^2+1)^2}$$

d'où $f'(x) = \frac{-g(x)e^{-x}}{(x^2+1)^2}$.

Sachant que $(x^2 + 1)^2 > 0$ et $e^{-x} > 0$, on en déduit que $f'(x)$est du signe de $-g(x)$, c'est-à-dire que $f'(x)$ est du signe opposé à celui de $g(x)$.

b. Du sens de variation de la fonction g, sachant que $g(\alpha) = 0$, on déduit que :
▪ Sur $[0 ; \alpha]$, $g(x) \leq 0$ donc $f'(x) \geq 0$ et la fonction f est croissante.
▪ Sur $[\alpha ; +\infty[$, $g(x) \geq 0$ donc $f'(x) \leq 0$ et la fonction f est décroissante.

Remarque
On peut aussi dresser le tableau de variations de f, mais ce n'est pas obligatoire pour répondre à la question posée.