1. Étudions le sens de variation de la fonction g afin d'en déduire son signe.

La fonction exp est dérivable sur$\mathbb{R}$ et exp'= exp comme rappelé dans l'énoncé.
La fonction carré est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $g'(x) = \mathrm{e}^x - x$.

▪ Signe de $g'(x)$:
On rappelle dans l'énoncé que pour tout x, $\mathrm{e}^x > x$.
On en déduit que $g'(x) > 0$ sur $[0\,;+\infty[$ donc g est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

▪ Signe de g :
Du sens de variation de g, on déduit que pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0)$.
Or $g(0) = \mathrm{e}^0 - 0$ et on rappelle dans l'énoncé que $\mathrm{e}^0 = 1$. Donc $g(0) = 1$.
On a donc montré que pour tout ≥ 0, $g(x) \geq 1$.
Par conséquent on a bien prouvé que $g(x) \geq 0$ sur $(0\,;+\infty[$.

2. Pour tout $x \geq 0$, $\mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2} \geq 0$ par la question 1 donc $\mathrm{e}^x \geq \frac{x^2}{2}$ et par suite, pour tout $x > 0$, $\frac{s^x}{x} > \frac{x}{2}$.
On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$.
On applique maintenant le 4e et dernier rappel de l'énoncé en prenant $\varphi(x) = \frac{x}{2}$, $\psi(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ et pour l'intervalle $[A\,;+\infty[$ par exemple $[1\,;+\infty[$.
On a bien en effet $\varphi(x) \leq \psi(x)$ sur $[A\,;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.