**1. Limite de $f$ en $+\infty$**

Pour tout $t$, $f(t) = 20\,t\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} + 10\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$.

*Elaborons une démarche :*
On essaie d'abord d'appliquer les théorèmes d'opérations : quand $t$ tend vers $+\infty$, $20t + 10$ tend vers $+\infty$ ; d'autre part $-\frac{1}{2}t$ tend vers -∞ donc $e^{-\frac{1}{2}t}$ tend vers 0.
On obtient une forme indéterminée du type « 0×∞ ».
On doit donc transformer l'expression pour essayer de faire intervenir une forme indéterminée connue avec l'exponentielle (voir propriété 5 page 72).

▪ Limite de $10\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ :

Quand $t$ tend vers +∞ , $\lim\limits_{t\to+\infty} -\frac{1}{2}t = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x} = 0$ donc par théorème de composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} = 0$.

Conseil
On peut penser que x = $-\frac{1}{2}$ t pour mieux comprendre ce théorème.

▪ Limite de $20\,t\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ :
*Démarche :*
Quand $t$ tend vers +∞ , $t\,e^{-\frac{1}{2}t}$ conduit à une forme indéterminée. On peut essayer de se ramener à utiliser la limite connue de $x\,\mathrm{e}^{-x}$ quand $x$ tend vers +∞.

$20\,t\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} = 40 \times \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ qui est de la forme $10x\mathrm{e}^{-x}$ avec $x = \frac{1}{2}t$.

Or $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{2}t = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ donc par théorème de composition, $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{2}t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} 20t\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t} = 0$.

▪ Limite de $f(t)$ : Par somme on en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$.

**2.** On a $f(t) = u(t)v(t)$avec $u(t) = 20t + 10$ et $v(t) = e^{-\frac{1}{2}t}$.
Les fonctions $u$ et $v$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $u'(t) = 20$ et
$v'(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$.
Donc $f$ est dérivable sur son ensemble de définition [0 ; +∞[ et
$f'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t) = 20e^{-\frac{1}{2}t} + (20t + 10)\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\right)$
$f'(t) = 20e^{-\frac{1}{2}t} - 10\,te^{-\frac{1}{2}t} - 5e^{-\frac{1}{2}t} = (15 - 10t)e^{-\frac{1}{2}t}$ .
Sachant que $e^{-\frac{1}{2}t}$ est toujours strictement positif, on en déduit que $f'(t)$ est du signe de $15 - 10t$.
On en déduit le tableau de variation suivant :

| $t$ | 0 | | 1,5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | + | 0 | - | |
| $f(t)$ | 10 | $\nearrow$ | $40e^{-0.75}$ | $\searrow$ | 0 |

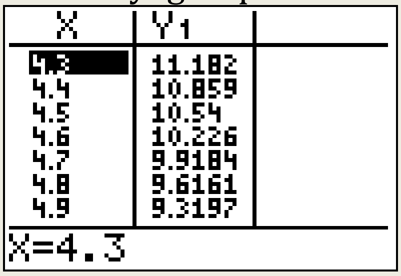
**3. a.**
▪ 1er cas : sur ] 0 ; 1,5]
D'après les variations de $f$, $f(t) > 10$ pour tout $t$ de ] 0 ; 1,5].
Donc l'équation $f(t) = 10$ n'a pas de solution dans l'intervalle ] 0 ; 1,5].

▪2e cas : sur [1,5 ; +∞[
Sur l'intervalle [1,5 ; +∞[, $f$ est continue car dérivable et strictement décroissante.
De plus $f(1{,}5)\approx$ 18,9 à 0,1 près et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=0$.
Donc 10 appartient à l'intervalle ] $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ ; $f(1{,}5)$] et par conséquent l'équation $f(t) = 10$ admet une unique solution dans l'intervalle [1,5 ; +∞[.

Conclusion
On déduit des deux cas étudiés précédemment que l'équation $f(t) = 10$ a une unique solution strictement positive.

**b.** Sur la courbe représentative de $f$, fournie à la question 4, sachant que 10 est l'image de 0 par $f$, on lit graphiquement que l'autre point de la courbe de même ordonnée 10 a son abscisse $\alpha$ comprise entre 4 et 5.

Par balayage à partir de 4 avec un pas de 0,1 on trouve que :



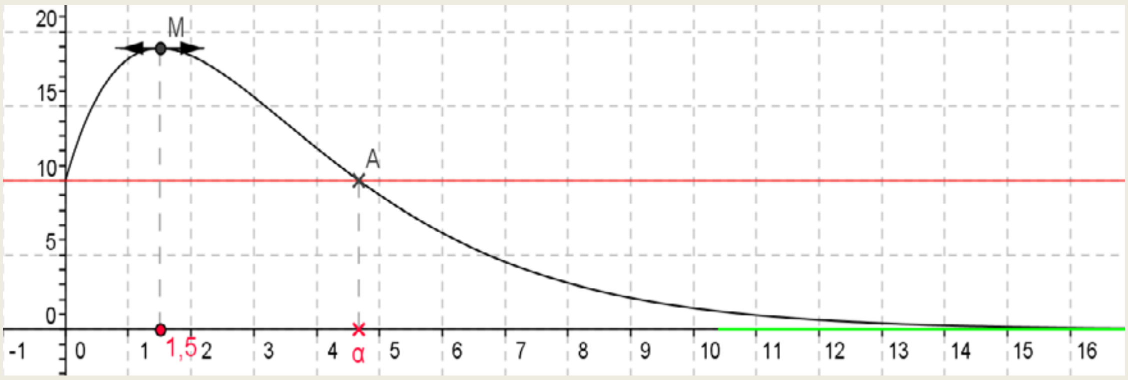
| X | Y1 |
|---|---|
| 4.3 | 11.182 |
| 4.4 | 10.859 |
| 4.5 | 10.54 |
| 4.6 | 10.226 |
| 4.7 | 9.9184 |
| 4.8 | 9.6161 |
| 4.9 | 9.3197 |

X=4.3

donc $f(4{,}6) > 10 > f(4{,}7)$ et par stricte décroissance de $f$, $4{,}6 < \alpha < 4{,}7$.

Par balayage avec un pas de 0,01 à partir de 4,6, on obtient de même
$4{,}67 < \alpha < 4{,}68$
Puis avec un balayage de pas 0,001, on obtient $4{,}673 < \alpha < 4{,}674$.

**4.** La courbe représentant $f$ admet l'axe des abscisses pour asymptote en $+\infty$ d'après la question 1. On connaît son sommet et la tangente horizontale en ce sommet d'après la question 2.
On connaît enfin la solution non nulle $\alpha$ de l'équation $f(t) = 10$ par la question 3.




5. La température initiale est donnée par $f(0)$, il s'agit de 10°C.
D'après le sens de variation de $f$ et la question 3, la température redescend à ce niveau entre 4,673 h et 4,674 h.

Convertissons pour arrondir à la minute :
0,673 h = 0,673 ×60 min = 40,38 min
0,674 h = 0,674 ×60 min = 40,44 min.
La température redescend donc à la température initiale au bout de
4 h 40 min, à 1 minute près.

6. Algorithme

VARIABLES : n nombre entier

INITIALISATION : n prend la valeur 0

TRAITEMENT : Tant que $|f((n+1)\times 1/4) - f(n\times 1/4)| \geq 0{,}1$ Faire

n prend la valeur n+1

FinTantque

SORTIE : Afficher n

*Remarque*

En le programmant par exemple sur Xcasfr, on obtient $n = 44$.

```
f(x):=(20*x+10)*exp(-0.5*x);
n:=0;
tantque abs(f(0.25*(n+1))-f(0.25*n))> 0.1 faire
n:=n+1;
ftantque;
afficher(n):;
```

```
// Parsing f
// Success compiling f
n:44
```