a. Pour tout $n \geq 1$, $\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n} = 0$.

Par le théorème « des gendarmes », on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $-1 \leq \sin n \leq 1$ donc $n^2 - 1 \leq u_n \leq n^2 + 1$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 - 1 = +\infty$, donc par théorème de comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Remarque

On n'a pas besoin de chercher la limite de $n^2 + 1$ quand n tend vers $+\infty$.

c. Pour tout n de $\mathbb{N}$, $-2e^n - 1 \leq -2e^n + (-1)^n \leq -2e^n + 1$.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$ car $e > 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -2e^n + 1 = -\infty$.

Remarque

On n'a pas besoin de chercher la limite de $-2e^n - 1$ quand n tend vers $+\infty$.

d. Pour tout $n \geq 1$, $\frac{-1}{n^2} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$.

Par le théorème « des gendarmes », on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$

Remarque

On aurait aussi pu encadrer u_n par $3 - \frac{1}{n^2} \leq 3 + \frac{(-1)^n}{n^2} \leq 3 + \frac{1}{n^2}$ et montrer que les termes extrêmes tendent tous les deux vers 3 quand n tend vers $+\infty$.