1. D'après le graphique, la fonction f semble décroissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ puis croissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$.

2. **a.** Le cosinus de tout réel est compris entre -1 et 1 donc pour tout nombre réel x,

$$-1 \leq \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \leq 1.$$

On multiplie chaque membre de cet encadrement par e^{-x} toujours strictement positif.
On obtient alors $-\mathrm{e}^{-x} \leq f(x) \leq \mathrm{e}^{-x}$ pour tout x réel.

b. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc pour $x \geq 2\pi$, $\mathrm{e}^{-x} \geq \mathrm{e}^{-2\pi}$.
Par conséquent pour tout $x \geq 2\pi$

$$-\mathrm{e}^{-2\pi} \leq -\mathrm{e}^{-x} \leq f(x) \leq \mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{-2\pi}.$$

Donc $$-e^{-2\pi} \leq f(x) \leq e^{-2\pi}.$$

Or $\mathrm{e}^{-2\pi} \approx 0{,}0018$ donc $\mathrm{e}^{-2\pi} \leq 0{,}002$.
Par conséquent pour tout $x \geq 2\pi$,

$$-0{,}0{,}2 \leq -\mathrm{e}^{-2\pi} \leq f(x) \leq \mathrm{e}^{-2\pi} \leq 0{,}002.$$

On en déduit que pour tout $x \geq 2\pi$, $-0{,}02 \leq f(x) \leq 0{,}02$.

Conseil
Bien faire attention en manipulant les valeurs approchées dans les encadrements ; il faut veiller à élargir l'encadrement obtenu pour obtenir un nouvel encadrement.
Par exemple de $f(x) \leq \mathrm{e}^{-2\pi}$ avec $\mathrm{e}^{-2\pi} \approx 0{,}001$ à 10^{-3} près, on ne pourrait pas déduire que $f(x) \leq 0{,}001$.

Interprétation graphique
La courbe représentative de la fonction f se trouve, sur $[2\pi\,;+\infty[$, comprise entre les droites d'équation $y = 0{,}002$ et $y = -0{,}002$.

3.a. On utilise les formules d'addition pour transformer premier membre :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

et les valeurs remarquables : $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On obtient donc :

$$\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin t + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos t$$

d'où $\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos t$.

c. Le sens de variation de f sur $[0\,;\pi]$ est donné par le signe de sa dérivée.

$f(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $v(x) = \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ et

$v'(x) = -\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

Donc f est dérivable sur $[0\,;\pi]$ avec $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ d'où :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) - \mathrm{e}^{-x}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\mathrm{e}^{-x}\left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

Par la question b, on obtient donc $f'(x) = -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-x}\cos x$.

Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$ pour tout réel x, le signe de $f'(x)$ est le signe opposé à celui de $\cos x$.

On en déduit le tableau de variations de f sur $[0\,;\pi]$:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
signe de $\cos x$	1	$+$	0	$-$	1
signe de $f'(x)$	-1	$-$	0	$+$	1
variations de f	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$	↗	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\pi}$

Le maximum de f sur $[0\,;\pi]$ est donc $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et son minimum est $-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$.

3. ▪ Élaborons une démarche pour répondre à cette question :

Conjecture : un tracé à la calculatrice des courbes $\mathcal{C}$ et Γ permet de conjecturer que la réponse à la question est positive. On cherche donc à démontrer ce résultat.

Pistes : les tangentes à $\mathcal{C}$ et Γ en un de leurs points communs passent par un même point. Elles sont donc confondues si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

On va donc chercher à calculer leurs coefficients directeurs. Ceci nécessite de connaître les abscisses des points communs aux deux courbes.

Démarche à mettre en œuvre :

① Déterminer les abscisses des points communs aux courbes $\mathcal{C}$ et Γ

② Déterminer les coefficients directeurs des tangentes à $\mathcal{C}$ et Γ en ces points

③ Comparer ces coefficients directeurs et conclure.

▪ **Résolution**

① Les points communs des courbes $\mathcal{C}$ et Γ ont pour absicsses les solutions de l'équation :

$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ qui équivaut, car $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$, à $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Les solutions sont donc les réels x tels que $x + \frac{\pi}{4} = k2\pi$ pour tout k entier relatif.

On obtient donc les abscisses des points communs aux deux courbes :

$x_k = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

② La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse x_k a pour coefficient directeur :

$f'(x_k) = -\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-x_k} \cos x_k$.

Or $\cos x_k = \cos\left(-\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $f'(x_k) = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{-x_k}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\mathrm{e}^{-x_k}$.

La tangente à la courbe Γ au point d'abscisse x_k représentant la fonction

$g : x \mapsto g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ a pour coefficient directeur $g'(x_k) = -\mathrm{e}^{-x_k}$

③ En chacun des points communs à $\mathcal{C}$ et Γ, les tangentes aux courbes $\mathcal{C}$ et Γ passent par ce point et ont même coefficient directeur.
On en conclut que ces deux courbes ont la même tangente en chacun de leurs points communs.

Conseil

Ne pas hésiter à rédiger tout ou partir de la recherche, une conjecture, une proposition de démarche et/ou des résultats partiels.