1. Le sens de variation de g est donné par le signe de sa dérivée.
La fonction g est en effet dérivable sur [0 ; 2π] avec :

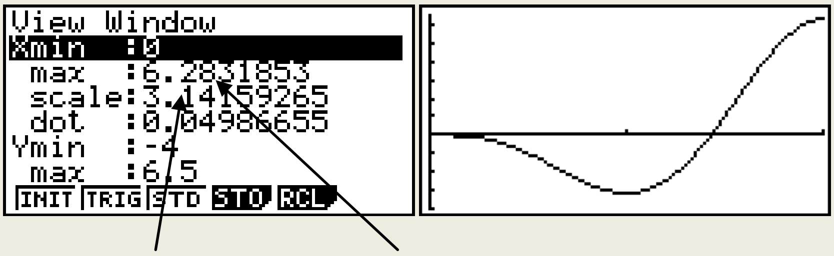
$$g'(x) = 1.\cos x + x.\cos'(x) - \sin'(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$$

Or sur [0 ; 2π], x est positif, donc $g'(x)$ est du signe opposé à celui de $\sin x$.
On en déduit donc le tableau de variations de g :

x	0		π		2π
signe de $\sin x$	0	+	0	−	0
signe de $g'(x)$	0	−	0	+	0
variations de g	0	↘	-π	↗	2π

Conseil
On vérifie ces résultats en traçant la courbe représentative de la fontion g sur la calculatirce (attention à bien être en mode Radian) :

Sur Casio Graph 35 +



Entrer π Entrer 2*π

Sur TI23 Plus
On peut tracer la courbe et faire les mêmes réglages que ci-dessus pour la fenêtre. Une autre solution est de tracer la courbe de la fonction g puis dans Zoom, choisir ZoomTrig pour obtenir une unité adaptée sur l'axe des abscisses.

2. a. **Conseil**

S'aider du tableau de variations de g que l'on complète en cherchant où g peut prendre la valeur 0.

x	0		π		?		2π
$g'(x)$	0	-	0	+			0
g	0	↘	$-\pi$	↗	0	↗	2π

L'une des solutions de l'équation $g(x) = 0$ est connue, il s'agit de 0 puisque $g(0) = 0$.
Comme g est strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$, pour $0 < x \leq \pi$, on a $g(x) < 0$. Donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas d'autre solution que 0 sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.
Sur l'intervalle $[\pi; 2\pi]$, g est continue car dérivable et strictement croissante.
De plus $g(\pi) < 0$ et $g(2\pi) > 0$.
On en déduit (propriété 3 page 40) que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $[\pi\,;2\pi]$.
Cette solution n'est pas égale à π donc l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions dans $[0\,;2\pi]$.

b. On peut utiliser une méthode de balayage pour déterminer la plus grande des solutions, que l'on nommera α.

Avec un pas de 0,1 :

X	Y1
4	-1.858
4.1	-1.539
4.2	-1.188
4.3	-.8073
4.4	-.4007
4.5	.02895
4.6	.47779

X=4

On constate que $g(4{,}4) < 0 < g(4{,}5)$.
Par stricte croissance de g sur $[\pi\,;2\pi]$,
on a donc $4{,}4 < \alpha < 4{,}5$.

Avec un pas de 0,01 à partir de 4,4 :

X	Y1
4.46	-.1454
4.47	-.1021
4.48	-.0586
4.49	-.0149
4.5	.02895
4.51	.07303
4.52	.11731

X=4.52

On en déduit de même que $4{,}49 < \alpha < 4{,}5$.

On ne conclut que $\alpha \approx 4{,}5$ à 10^{-2} près par excès.

Conseil

Graphiquement, la courbe représentant g coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(\alpha\ ;0)$. Si la courbe a été tracée sur une calculatrice, on peut émettre une conjecture initiale sur α ou contrôler a posteriori.