

Chapitre 5 – Evaluer ses capacités – Exercice 71

1. On peut écrire le rapport $\frac{\sin x}{x}$ sous la forme $\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$ c'est-à-dire $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ où f désigne la fonction sinus.

La fonction sinus étant dérivable sur \mathbb{R} , elle est dérivable en 0 donc, d'après la définition page 38, $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ a pour limite $f'(0)$ quand x tend vers 0.

Par conséquent :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

2. Soit $u_n = n^2 \sin \frac{2}{n^2}$.

Posons $x = \frac{2}{n^2}$. Alors $n^2 = \frac{2}{x}$ donc $u_n = \frac{2}{x} \sin x = 2 \frac{\sin x}{x}$.

Quand n tend vers $+\infty$, x tend vers 0. Comme $\frac{\sin x}{x}$ a pour limite 1 quand x tend vers 0, la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ est égale à 2. La suite (u_n) converge donc vers 2.

Conseil

L'énoncé donne une indication importante en précisant qu'il s'agit d'appliquer le résultat précédent. Il faut donc faire intervenir $\sin x$. Le choix de poser $x = \frac{2}{n^2}$ s'impose donc.