1. Pour compléter le tableau, il faut calculer les images par f les réels $-\pi, -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ et π.

$f(-\pi) = 4 - 3\cos(-\pi) + \sqrt{3}\sin(-\pi) = 4 - 3(-1) = 7$

$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4 - 3\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 4 - 3\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}.\frac{1}{2}$

$= 4 - 2\sqrt{3}$

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4 - 3\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4 - 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3}.\frac{1}{2}$

$= 4 + 2\sqrt{3}$

$f(\pi) = f(-\pi + 2\pi) = f(-\pi) = 7$ car les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

On obtient donc le tableau ci-dessous :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
f	7		$4 + 2\sqrt{3}$	
		$4 - 2\sqrt{3}$		7

2. On a $4 - 2\sqrt{3} < 4$ donc $4 - 2\sqrt{3} < 7$.

Des variations de la fonction f sur $[-\pi ; \pi]$, on déduit donc que f admet un minimum en $-\frac{\pi}{6}$ et que ce minimum est $4 - 2\sqrt{3} \approx 0{,}54$.

On remarque ainsi que $f(\theta) > 0$ sur $[-\pi ; \pi]$.

Or $AF^2 = f(\theta)$ donc, AF étant positive, $AF = \sqrt{f(\theta)}$.

Par propriété la fonction qui a tout réel θ de $[-\pi ; \pi]$ associe $\sqrt{f(\theta)}$ a même variations que f sur $[-\pi ; \pi]$.

Donc AF est minimale pour $\theta = -\frac{\pi}{6}$ sur $[-\pi ; \pi]$.

La conjecture est bien validée.

3. a. f est dérivable sur [-π ; π] avec $f'(x) = -3\cos'(x) + \sqrt{3}\sin'(x)$ soit :

$$f'(x) = 3\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x)$$

Transformons $2\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ à l'aide de la formule d'addition :

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$2\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}\,[\sin x \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos x\,]$$

$$= 2\sqrt{3}\,[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x]$$

$$= 3\sin x + \sqrt{3}\cos x$$ où l'on retrouve bien $f'(x)$.

On a donc montré que $f'(x) = 2\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Conseil

Pour démontrer une égalité, il faut commencer par observer les deux membres pour savoir s'il est plus possible de transformer le membre de gauche en celui de droite ou l'inverse .

Ici, pour démontrer que $3\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) = 2\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, il est plus simple de partir du membre de droite pour arriver au membre de gauche à l'aide des formules d'addition que de tenter l'inverse.

b. Le sens de variation de f est donné par le signe de sa dérivée.

On a par la question précédente $f'(x) = 2\sqrt{3}\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

Par conséquent, $f'(x)$ a même signe que $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Retrouvons alors les variations de f :

▪ **Sur $\left[-\pi\,;\,-\frac{\pi}{6}\right]$**

On a $-\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6}$ donc $-\pi + \frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}$

c'est-à-dire $-\frac{5\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq 0$.

Dans ce cas $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ est négatif et ne s'annule que pour $x + \frac{\pi}{6} = 0$ soit $x = -\frac{\pi}{6}$.

Par conséquent $f'(x) \leq 0$ et f'ne s'annule qu'une fois, donc f est strictement décroissante sur $\left[-\pi\,;\,-\frac{\pi}{6}\right]$.

▪ **Sur $\left[-\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right]$**

On a $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ donc $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6} \leq x+\frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6}$
c'est-à-dire $0 \leq x+\frac{\pi}{6} \leq \pi$.
Dans ce cas $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ est positif et ne s'annule que pour $x+\frac{\pi}{6}=0$ ou π soit $x = -\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$.
Par conséquent $f'(x) \geq 0$ et f' ne s'annule que deux fois, donc f est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{6}\,;\frac{5\pi}{6}\right]$.

▪ **Sur $\left[\frac{5\pi}{6}\,;\pi\right]$**

On a $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi$ donc $\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6} \leq x+\frac{\pi}{6} \leq \pi+\frac{\pi}{6}$
c'est-à-dire $\pi \leq x+\frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$.
Dans ce cas $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ est négatif et ne s'annule que pour $x+\frac{\pi}{6}=\pi$ soit $x = \frac{5\pi}{6}$.
Par conséquent $f'(x) \leq 0$ et f' ne s'annule qu'une fois, donc f est strictement décroissante sur $\left[\frac{5\pi}{6}\,;\pi\right]$

Conseil

Comme il s'agit de retrouver les variations de f données dans le tableau, il est inutile d'étudier le signe de $f'(x)$ en cherchant les intervalles où $f'(x)$ est de signe constant (comme à l'exercice résolu 4 page 141).
Il est beaucoup plus simple de se placer sur chacun des intervalles de monotonie de f donnés dans le tableau de variations et de déterminer sur chacun de ces intervalles le signe de $f'(x)$ afin de justifier ces variations.