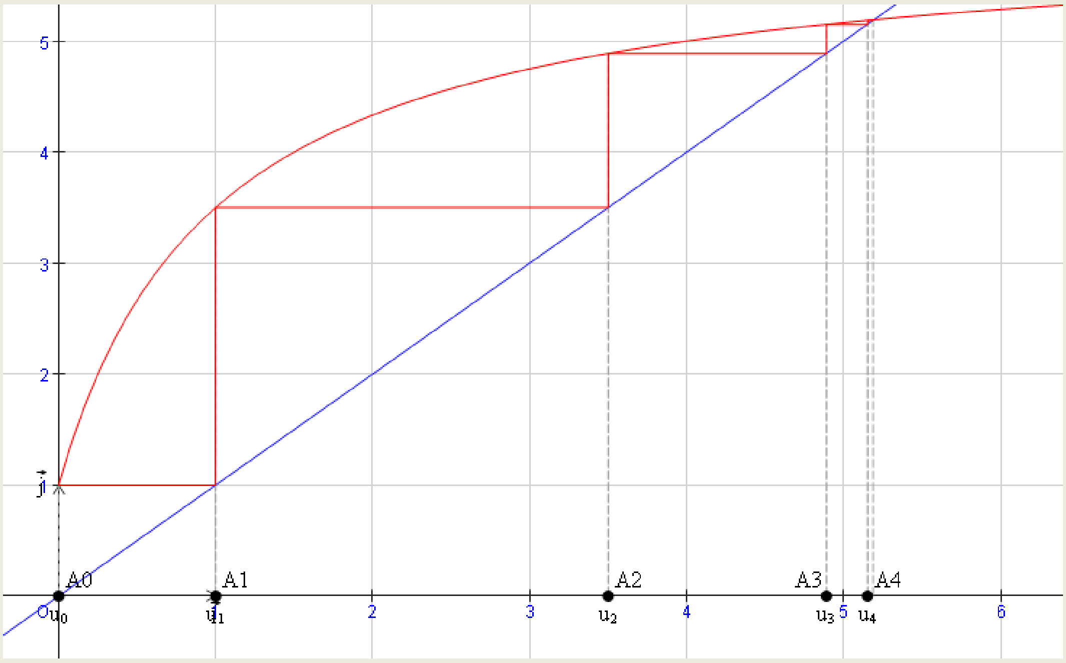
1.a. Avec $u_0 = 0$.



On conjecture que la suite (u_n) est croissante et converge vers l'abscisse α du point d'intersection de la courbe représentant f et de la droite d'équation $y = x$.

b. Montrons par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

▪ Initialisation

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 0, u_1 = f(u_0) = f(0) = 6 - \frac{5}{1} = 1$.

Donc les inégalités $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$ sont vérifiées car $\alpha \approx 5{,}2$.

▪ Hérédité

Soit n un entier naturel. Supposons que pour cet entier , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

Montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

Par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
La fonction f est croissante sur [0 ; +∞[donc :

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha).$$

Or $f(0) = 1, f(\alpha) = \alpha$ car α est la solution de l' équation $y = f(x)$ sur [0 ; +∞[.

De plus $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$.

On en déduit donc que $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$
donc, *a fortiori*, $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

▪ Conclusion Pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

On a donc prouvé que la suite (u_n) est une suite croissante et majorée par α. On en déduit qu'elle converge.

Tous les termes u_n appartenant à [0 ; α], la limite ℓ de la suite appartient aussi à [0 ; α].

Ayant $u_{n+1} = 6 - \frac{5}{u_n+1}$, par théorèmes d'opérations, on en déduit que u_{n+1} tend vers $6 - \frac{5}{\ell+1}$. Mais u_{n+1} tend aussi vers ℓ.

Par unicité de la limite de (u_{n+1}), on en déduit que $\ell = 6 - \frac{5}{\ell+1}$ c'est-à-dire $\ell = f(\ell)$, avec ℓ dans [0 ; α] .

Comme l'équation $f(x) = x$ a pour unique solution α sur [0 ; +∞[, on en déduit que $\ell = \alpha$.

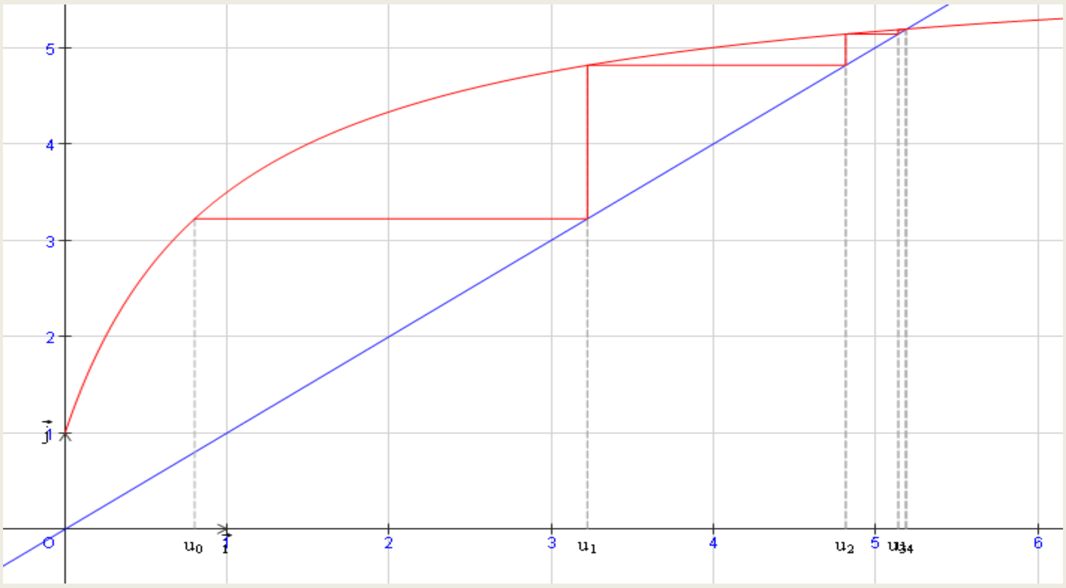
En conclusion, la suite (u_n) converge vers α.

2. Conjectures

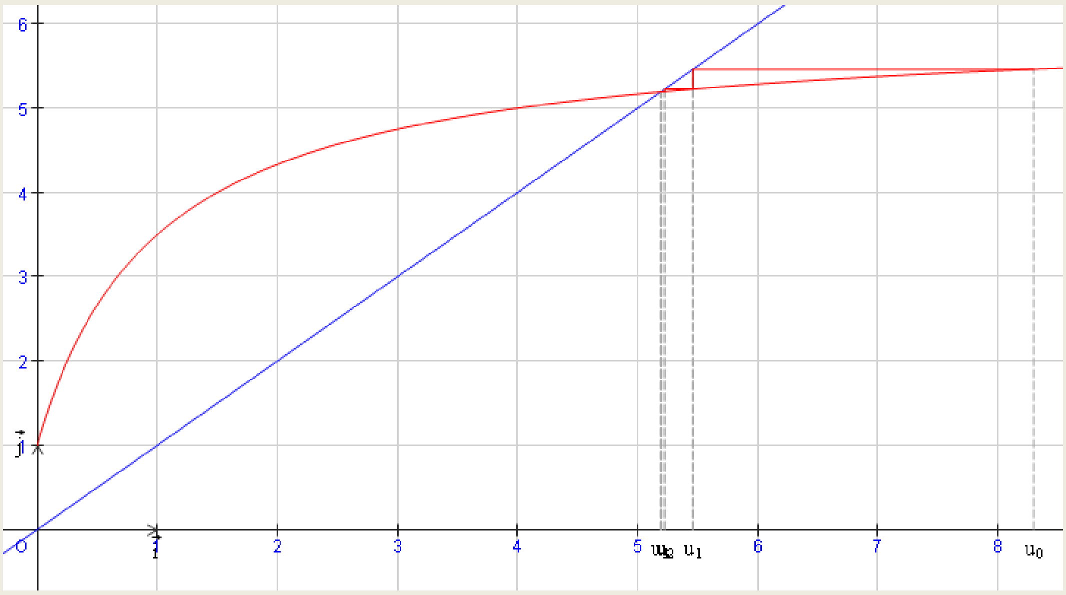
On peut s'appuyer sur la représentation graphique de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$ pour émettre des conjectures.

▪ Si $0 < u_0 < \alpha$, on conjecture le même comportement que pour

$u_0 = 0$ comme sur ce graphique avec $u_0 = 0{,}8$.



▪Si $u_0 > \alpha$, on conjecture que al sutie est décroissante et converge vers α.



Démonstrations

▪1er cas : Le cas particulier $\boldsymbol{u_0 = \alpha}$

Dans ce cas, comme $f(\alpha) = \alpha$, la suite (u_n) est constante : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \alpha$. Elle converge donc vers α.

2e cas : Si $\boldsymbol{0 \leq u_0} < \alpha$

Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

▪ Initialisation : pour $n = 0$

Il s'agit de prouver que $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$.

Pour comparer $u_1 = f(u_0)$ et u_0, comparons x et $f(x)$:

$$f(x) - x = 6 - \frac{5}{x+1} - x = \frac{6x+6-5-x^2-x}{x+1} = \frac{-x^2+5x+1}{x+1}.$$

Pour $x > 0$, $x + 1 > 0$ donc $f(x) - x$ est du signe de $-x^2 + 5x + 1$, trinôme de degré 2 dont les racines sont $\frac{-5-\sqrt{29}}{-2}$ positive et $\frac{-5+\sqrt{29}}{-2}$ négative.

Donc pour $0 \leq x < \alpha$, x est entre les racines du trinôme donc

$-x^2 + 5x + 1 > 0$ et pour $x > \alpha$, x est en dehors des racines donc $-x^2 + 5x + 1 < 0$.

Par conséquent pour $0 \leq x < \alpha$, $f(x) - x > 0$ et pour $x > \alpha$, $f(x) - x < 0$.

Comme $0 \leq u_0 < \alpha$, on a $f(u_0) - u_0 > 0$ c'est-à-dire $u_1 > u_0$.

De plus, on sait que $0 \leq u_0$. Enfin $0 \leq u_0 \leq \alpha$ donne $u_1 \leq f(\alpha)$ soit $u_1 \leq \alpha$ par croissance de f sur $[0 ; +\infty[$.

On a donc bien obtenu $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$.

L'initialisation est vérifiée pour $n = 0$.

▪ Hérédité et conclusion : comme dans la question 1.

La suite est donc croissante et majorée donc converge.

Le raisonnement tenu dans la question 1 pour déterminer sa limite est encore valable donc elle converge vers α.

Conseil

L'étude du signe de $f(x) - x$ revient à étudier la position de la courbe représentant f et de la droite d'équation $y = x$. C'est cette position relative (et pas la croissance de f) qui détermine l'ordre des deux premiers termes.

3e cas : Si $u_0 > \alpha$

Montons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n$ c'est-à-dire que la suite (u_n) est décroissante et minorée par α.

▪ Initialisation Pour $n = 0$, on a $u_0 > \alpha, u_1 = f(u_0)$.
De l'étude de signe de $f(x) - x$ effectuée dans le 2e cas, on déduit que $f(u_0) - u_0 < 0$ c'est-à-dire $u_1 < u_0$.

De plus de $\alpha < u_0$ on déduit par croissance de f que $f(\alpha) \leq f(u_0)$ soit $\alpha \leq u_1$.

On a donc bien $\alpha \leq u_1 \leq u_0$.

▪ Hérédité Soit n un entier naturel. Supposons que pour cet entier , $\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n$. Montrons que $\alpha \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

Par hypothèse de récurrence, $\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n$.
La fonction f est croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc $f(\alpha) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$.

On en déduit donc que $\alpha \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

▪ Conclusion Pour tout n de $\mathbb{N}$, $\alpha \leq u_{n+1} \leq u_n$.

La suite est donc décroissante et minorée par α donc elle converge vers une limite $\ell' \geq \alpha$ On montre que $\ell' = \alpha$ comme dans la question 1.

Remarque : on a rédigé ci-dessus les démonstrations complètes. Dans ce type de question, il ne faut pas hésiter à rédiger déjà des conjectures, si possible à indiquer des démarches comme dans les éléments de réponse page 111, même si on ne démontre pas tout en détail.