Partie A

1. Montrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.

▪ Initialisation

Pour $n = 0$, on a d'une part, $u_n = u_0 = 13$ par énoncé.
Et d'autre part, $1 + \frac{12}{5^n} = 1 + \frac{12}{5^0} = 1 + 12 = 13$.
L'égalité $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ est donc vérifiée pour $n = 0$.

▪ Hérédité

Soit n un entier naturel. Supposons que pour cet entier, on ait $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.
Montrons que $u_{n+1} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$.
Par hypothèse de récurrence, $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.
Par définition de la suite (u_n), $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$. Donc $u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{12}{5^n}\right) + \frac{4}{5}$
d'où $u_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{12}{5^{n+1}} + \frac{4}{5} = 1 + \frac{12}{5^{n+1}}$.

▪ Conclusion

L'égalité étant vraie pour $n = 0$ et héréditaire à partir du rang 0, elle est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$: pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$.

Limite de la suite (u_n)
Comme 5 > 1, par propriété 5^n tend vers +∞ quand n tend vers +∞.
Par théorèmes d'opérations, on en déduit que la suite (u_n) a pour limite 1.

2. a. Le sens de variation de la suite (S_n) est donné par le signe de $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$.
De $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$ pour tout n, on déduit que u_n est positif pour tout n donc $S_{n+1} \geq S_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
La suite (S_n) est donc croissante.

b. $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(1+\frac{12}{5^k}\right) = \sum_{k=0}^{n}1 + \sum_{k=0}^{n}\frac{12}{5^k} = n+1+12\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^k$ car $\frac{1}{5^k} = \left(\frac{1}{5}\right)^k$.

Pour $q \neq 1$, on a $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ donc $S_n = n + 1 + 12\,\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}}$

soit $S_n = n + 1 + 12 \times \frac{5}{4} \times \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) = n + 16 - 12\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$.

c. Comme $0 \leq \frac{1}{5} < 1$, par propriété, $\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Par théorèmes d'opérations, on en déduit que la suite (S_n) a pour limite $+\infty$

Partie B

La partie A nous fournit un exemple de situation étudiée dans la partie B, avec pour suite (x_n), la suite (u_n).

On a démontré en partie A que la suite (u_n) a pour limite 1 et la suite (S_n) a pour limite $+\infty$.

On est donc dans un cas où la suite (x_n) converge et la suite (S_n) diverge.

La partie A nous permet donc d'affirmer que la proposition 1 est fausse.

Le sens de variation de la suite (S_n) est donné par le signe de $S_{n+1} - S_n = x_{n+1}$ donc par le signe de la suite (x_n), pas par ses variations.

Fabriquons donc une suite (x_n) qui soit croissante mais négative. Dans ce cas la suite (S_n) sera décroisssante.

Un exemple simple est $x_n = -\frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

La suite (x_n) définie sur $\mathbb{N}$ est croissante et la suite (S_n) est décroissante.

Ceci prouve que la proposition B est également fausse.