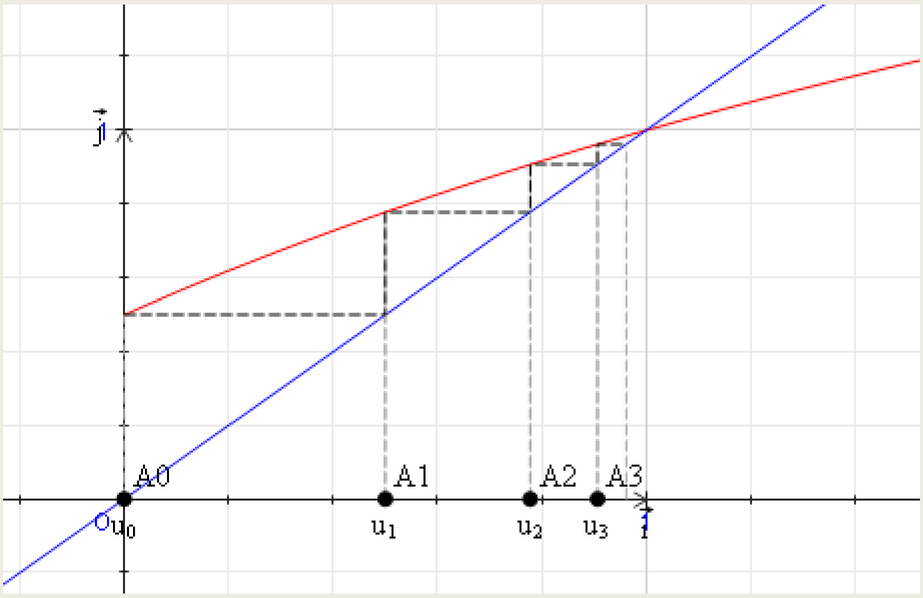
**1. a.** Avec $u_0 = 0$. (Unité graphique non respectée)




**b.** D'après le graphique, on peut conjecturer que la suite $(u_n)$ est croissante et qu'elle converge vers 1.

**c.** Montrons par récurrence que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

▪ Initialisation

Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ donc la double inégalité $0 \leq u_n \leq 1$ est vérifiée pour $n = 0$.

▪ Hérédité

Soit $n$ un entier positif ou nul. Supposons que pour cet entier $n$, $0 \leq u_n \leq 1$.
Montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.
Par hypothèse de récurrence, $0 \leq u_n \leq 1$.
Par hypothèse donnée dans l'énoncé, la fonction $f$ est croissante sur [0 ; 2], donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$ c'est-à-dire $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$.
*A fortiori*, on a bien $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

▪ Conclusion

Pour tout entier naturel $n$, $0 \leq u_n \leq 1$.

**d.** Montrons par récurrence que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

▪ Initialisation

Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0) = f(0) = \frac{1}{2}$.

Donc l'inégalité $u_n \leq u_{n+1}$ est vérifiée pour $n = 0$.

▪ Hérédité

Soit $n$ un entier positif ou nul. Supposons que pour cet entier $n$, $u_n \leq u_{n+1}$.
Montrons que $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.
On sait par hypothèse de récurrence que $u_n \leq u_{n+1}$, et par la question c., que les termes $u_n$ et $u_{n+1}$ appartiennent à [0 ; 1].
On a donc $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$
Or la fonction $f$ est croissante sur [0 ; 2], donc $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+1}$.

▪ Conclusion

Pour tout entier naturel $n$, $\leq u_n \leq u_{n+1}$. La suite $(u_n)$ est donc croissante.

**Conseil**

On pouvait aussi penser à étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ en exprimant cette différence uniquement en fonction de $u_n$, sous la forme d'un quotient puis en étudiant son signe. Mais cette démarche est plus compliquée d'un point de vue technique que la récurrence mise en œuvre ci-dessus. Cette démonstration par récurrence est très classique dans le cas où $f$ est croissante sur un intervalle contenant tous les termes de la suite.

**e.** On a donc montré que la suite $(u_n)$ est croissante et majorée par 1.
On en déduit qu'elle converge.
De plus tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle [0 ; 1] donc sa limite $\ell$ appartient aussi à [0 ; 1].
On sait que $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+4}$.
Par théorème d'opérations, $\frac{3u_n+2}{u_n+4}$ tend vers $\frac{3\ell+2}{\ell+4}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.
Or $u_{n+1}$ tend vers $\ell$ quand $n$ tend vers $+\infty$ .
Par unicité de la limité d'une suite convergente on en déduit que $\ell = \frac{3\ell+2}{\ell+4}$.
Résolvons donc l'équation $\ell = \frac{3\ell+2}{\ell+4}$ :

$$\ell = \frac{3\ell+2}{\ell+4} \Leftrightarrow \ell^2 + 4\ell = 3\ell + 2 \Leftrightarrow \ell^2 + \ell - 2 = 0.$$

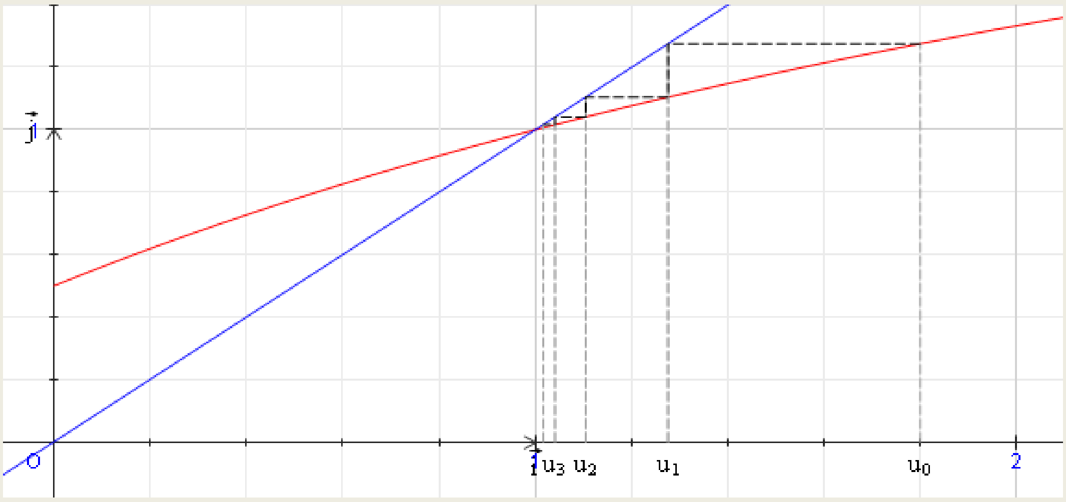
Cette équation de degré 2 a pour racines 1 et $-2$.
Comme $\ell$ appartient à [0 ; 1], on en déduit que $\ell = 1$.

**Conseil**

Vérifier que ces résultats sont cohérents avec la conjecture graphique de la question 1.b. Dire que $\ell = \frac{3\ell+2}{\ell+4}$, c'est dire que $\ell$ est l'abscisse d'un point d'intersection de al courbe représentative de $f$ et de la droite d'équation $y = x$.

**2.** On suppose que $u_0 \in [1 ; 2]$.

**a.** Pour émettre une conjecture, on s'aide d'une représentation graphique des premiers termes de la suite.




Il semble que dans ce cas, la suite $(u_n)$ soit décroissante et qu'elle converge encore vers 1.

**b.** En se laissant guidé par les conjectures précédentes, on peut élaborer une démarche calquée sur celle de la question 1.

- Démontrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_n \in [1 ; 2]$ : la démonstration se fera par récurrence comme à la question 1.c. en utilisant la croissance de $f$ sur $[1 ; 2]$.
- Démontrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$, c'est-à-dire que la suite $(u_n)$ est décroissante. La démonstration sera analogue à celle effectuée à la question 1.d. et utilise la croissance de $f$ sur $[1 ; 2]$.
- En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers une limite $\ell'$ qui appartient à $[1 ; 2]$.
- Déterminer $\ell'$ comme en question 1.e. ce qui conduira à $\ell' = 1$.

**Conseil**

il s'agit d'élaborer une démarche, pas de la mettre en œuvre. Il suffit donc de décrire les différentes étapes du raisonnement.