1. a. $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 0 - 2 = -\frac{5}{3}$;
$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 1 - 2 = -\frac{14}{9}$;
$u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 - 2 = -\frac{14}{27}$.

b. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.

▪ Initialisation

On a $u_4 = \frac{1}{3}u_3 + 3 - 2 = \frac{67}{81}$. Donc $u_4 \geq 0$.
L'inégalité est vérifiée pour $n = 4$.

▪ Hérédité

Soit un entier $n \geq 4$. Supposons que pour cet entier, on ait $u_n \geq 0$.
Montrons que $u_{n+1} \geq 0$.
De $u_n \geq 0$, on déduit que $\frac{1}{3}u_n \geq 0$ d'une part et d'autre part $n - 2 \geq 2$ car $n \geq 4$.
En ajoutant membre à membre ces deux inégalités, on obtient :
$\frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq 2$ d'où $u_{n+1} \geq 0$.

▪ Conclusion

L'inégalité $u_n \geq 0$ étant vraie pour $n = 4$ et héréditaire à partir du rang 4, est vraie pour tout $n \geq 4$.

c. Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.

▪ Initialisation

On a $u_5 = \frac{1}{3}u_4 + 4 - 2 = \frac{553}{243} \approx 2{,}27$. Pour $n = 5$, on a $n - 3 = 2$.
Donc l'inégalité $u_n \geq n - 3$ est vérifiée pour $n = 5$.

▪ Hérédité

Soit un entier $n \geq 5$. Supposons que pour cet entier, on ait $u_n \geq n - 3$.
Montrons que $u_{n+1} \geq (n+1) - 3$ c'est-à-dire $u_{n+1} \geq n - 2$.
On a $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$ avec $u_n \geq n - 3 \geq 0$ donc $u_{n+1} \geq n - 2$.

▪ Conclusion

Pour tout $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.

d. Ayant pour tout $n \geq 5, u_n \geq n - 3$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} n - 3 = +\infty$, on déduit par théorème de comparaison que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

2.a. Par définition de la suite (v_n), on a $v_{n+1} = -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2}$
soit $v_{n+1} = -2 \left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3(n+1) - \frac{21}{2}$.
En simplifiant, on obtient $v_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + n - \frac{7}{2}$.
On met $\frac{1}{3}$ en facteur : $v_{n+1} = \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) = \frac{1}{3}v_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.
Son premier terme est $v_0 = -2u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}$.

b. Par propriété, $v_n = v_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
Par définition de v_n, c'est dire que $-2u_n + 3n - \frac{21}{2} = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
On en déduit que $-2u_n = -\frac{25}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3n + \frac{21}{2}$ puis que
$u_n = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n + \frac{21}{4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

c. $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{25}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}n - \frac{21}{4}\right)$.

Or $\frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$ est une constante par rapport à k donc $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}n - \frac{21}{4}\right)$ est une somme de n+1 termes tous égaux à $\frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$.

Par conséquent $\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}n - \frac{21}{4}\right) = \left(\frac{3}{2}n - \frac{21}{4}\right) \times (n+1)$ d'où

$$S_n = \frac{25}{4}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{3}{2}n - \frac{21}{4}\right)(n+1)$$

On sait que $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour $q \neq 1$ donc $S_n = \frac{25}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} + \left(\frac{3}{2}n - \frac{21}{4}\right)(n+1)$

On en déduit que :

$$S_n = \frac{75}{8} \times \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \left(\frac{3}{2}n - \frac{21}{4}\right)(n+1)$$

2. a. Le sens de variation de la suite (S_n) est donné par le signe de $S_{n+1} - S_n$.
Or $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$ et on sait que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 4$ (question 1.b.) donc $u_{n+1} \geq 0$ pour tout $n \geq 3$.
On en déduit que la suite (S_n) est croissante à partir du rang 3.

b. Si on trouve un entier $n_0 \geq 4$ tel que $u_{n_0} \geq 10^{12}$, on aura pour tout $n \geq n_0$, $S_n \geq S_{n_0} \geq 10^{12}$.
Donc n_0 sera bien un rang à partir duquel $S_n \geq 10^{12}$.
Un algorithme possible :

VARIABLES : n, S nombres
INITIALISATION : n prend la valeur 0 ; S prend la valeur 1
TRAITEMENT : Tantque S <10^{12} faire
n prend la valeur n+1
S prend la valeur $\frac{75}{8}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)+\left(\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}\right)(n+1)$
FinTantque
SORTIE : Afficher n

Remarque
On pourrait ici déterminer un rang à partir duquel $S_n \geq 10^{12}$ par le calcul.
En effet on peut remarquer que $S_n \geq \left(\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}\right)(n+1)$. Il suffit alors de résoudre l'inéquation $\left(\frac{3}{2}n-\frac{21}{4}\right)(n+1) \geq 10^{12}$.