Définition

Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

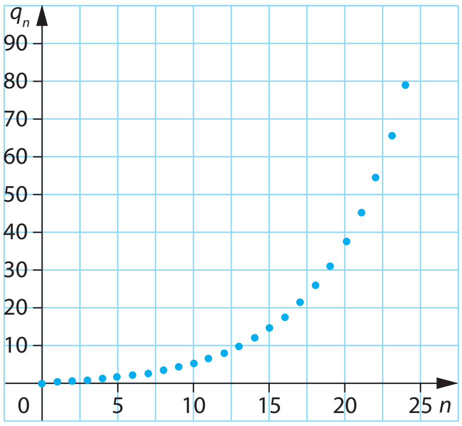
- croissante si et seulement si, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$;
- décroissante si et seulement si, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$.

Propriété 1

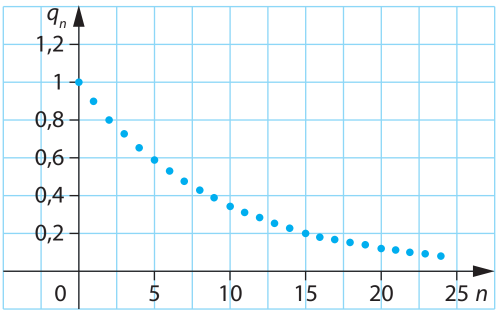
- Une suite arithmétique de raison r est croissante si $r > 0$, décroissante si $r < 0$.
- La suite $(q^n)_{n \geqslant 0}$ est croissante si $q > 1$ et décroissante si $0 < q < 1$.

Exemples

Suite (q^n) avec $q = 1,2$



Suite (q^n) avec $q = 0,9$



Remarques

- Une suite peut être ni croissante ni décroissante, comme la suite (u_n) définie par $u_n = (-2)^n$ pour $n \geqslant 0$ où $u_0 = 1$, $u_1 = -2$, $u_2 = 4$, $u_3 = -8$, $u_4 = 16$, etc.
- Une suite arithmétique de raison $r = 0$ est une suite constante : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n = u_0$. C'est aussi le cas d'une suite géométrique de raison $q = 1$.

1 Étudier le sens de variation d'une suite

Énoncé

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

a. $u_n = -3 + \dfrac{2}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$;

b. $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n + 4n + 3$ pour tout $n \geqslant 0$

c. $u_n = \dfrac{2^n}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Solution

a. On a $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = -3 + \dfrac{2}{x}$. Sur $]0\,;+\infty[$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante.

Par conséquent, f est décroissante sur $]0\,;+\infty[$ (chapitre 2, propriétés **5** et **6**).

Pour tout $n \geqslant 1$, on a évidemment $n + 1 \geqslant n \geqslant 1$.

Par décroissance de f, on en déduit que $f(n+1) \leqslant f(n)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

b. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 4n + 3$.

Comme $n \geqslant 0$, $4n + 3 \geqslant 3$ donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite (u_n) est croissante.

c. Pour tout n, on a bien $u_n > 0$.

De plus, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2^{n+1}}{n+1} \times \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{2n}{n+1}$.

Or, pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{2n}{n+1} \geqslant 1 \Leftrightarrow 2n \geqslant n+1 \Leftrightarrow n \geqslant 1$.

On en déduit que pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

Donc pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ puisque $u_n > 0$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

MÉTHODE

Pour étudier le sens de variation d'une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$, on dispose de plusieurs méthodes.

- **Si $u_n = f(n)$, étudier le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$:**
  – si f est croissante, pour tout n,
  $n+1 \geqslant n \Rightarrow f(n+1) \geqslant f(n)$ soit $u_{n+1} \geqslant u_n$;
  – si f est décroissante, pour tout n
  $n+1 \geqslant n \Rightarrow f(n+1) \leqslant f(n)$ soit $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- **Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$:**
  – si, pour tout n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$;
  – si, pour tout n, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ alors $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- **si $u_n > 0$ pour tout n, comparer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :**
  – si pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ alors $u_{n+1} \leqslant u_n$;
  – si pour tout n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$.