

Chapitre 3 – Exercice guidé page 73

1. On a $f_k(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x + k, v(x) = e^{-x}$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur \mathbb{R} avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$

donc f_k est dérivable sur \mathbb{R} et

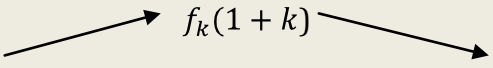
$$f_k'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ = e^{-x} + (x + k)(-e^{-x}) = e^{-x} - (x + k)e^{-x}$$

d'où $f_k'(x) = (1 - x - k)e^{-x}$ en factorisant par e^{-x} .

Comme $e^X > 0$ pour tout réel X , on a $e^{-x} > 0$ donc $f_k'(x)$ est du signe de $1 - x - k$.

Or $1 - x - k > 0 \Leftrightarrow 1 - k > x$.

On obtient donc le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	$1 - k$	$+\infty$
$f_k'(x)$	+	0	-
$f_k(x)$			

On en déduit que f_k admet un maximum en $1 - k$.

2. Le point M_k de la courbe C_k a pour abscisse $1 - k$ et pour ordonnée

$$f_k(1 - k) = (1 - k + k)e^{-(1-k)} = e^{-(1-k)}.$$

On a donc $M_k(1 - k ; e^{-(1-k)})$.

Ses coordonnées vérifient l'équation $y = e^{-x}$ avec $x = 1 - k$, donc M_k appartient à la courbe d'équation $y = e^{-x}$.

3. a. La fonction $h : x \mapsto e^{-x}$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} alors que les fonctions f_k admettent un maximum sur \mathbb{R} .

La courbe bleue est donc celle d'équation $y = e^{-x}$ et la courbe rouge représente une fonction f_k .

b. On a $h(0) = 1$ donc la courbe bleue coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 1)$.

Une graduation sur l'axe des ordonnées correspond donc à une unité.

La courbe rouge coupe alors l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0 ; 2)$, autrement dit $f_k(0) = 2$.

Or $f_k(0) = (0 + k)e^0 = k$. Donc $k = 2$. La courbe bleue est donc la courbe C_2 .

Par la question 1, on sait que f_2 admet un maximum en $1 - 2 = -1$.

On en déduit que sur l'axe des abscisses une graduation correspond à une demi-unité.