1. On donne $g(x) = \mathrm{e}^{x^2+ax+b}$. On a donc deux inconnues a et b à déterminer et pour cela on a besoin de deux équations.
On exploite donc les deux renseignements suivants donnés dans le tableau :
$g\left(\frac{3}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{5}{4}}$ et $g'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$.

• $g\left(\frac{3}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{5}{4}} \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\frac{9}{4}+a\frac{3}{2}+b} = \mathrm{e}^{-\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \frac{9}{4} + \frac{3}{2}a + b = -\frac{5}{4}$
car $\mathrm{e}^{a} = \mathrm{e}^{b} \Leftrightarrow a = b$.
On obtient donc comme première équation : $\frac{3}{2}a + b = -\frac{7}{2}$.
• $g(x)$ est de la forme $\mathrm{e}^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + ax + b$. La fonction polynôme u est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur$\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)} = (2x + a)\mathrm{e}^{x^2+ax+b} = (2x + a)g(x).$$

Alors $g'\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow (3 + a)g\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. Sachant que $g\left(\frac{3}{2}\right) \neq 0$, on en déduit que $3 + a = 0$.

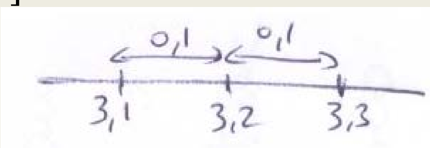
On a donc les équations $\frac{3}{2}a + b = -\frac{7}{2}$ et $a + 3 = 0$ d'où l'on déduit
$a = -3$ puis $b = -\frac{7}{2} - \frac{3}{2}a = 1$.

La fonction g est donc définie par $g(x) = \mathrm{e}^{x^2-3x+1}$.

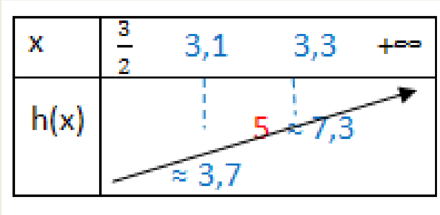
Remarque : on remarque qu'il s'agit de la fonction h donnée dans la question suivante.

2.a. On remarque que la fonction h est la fonction g trouvée dans la question 1. On connaît donc son tableau de variations.

Dire que 3,2 est une valeur approchée à 10^{-1} près d'une solution de l'équation $h(x) = 5$ signifie que l'équation $h(x) = 5$ admet une solution dans l'intervalle [3,1 ; 3,3].

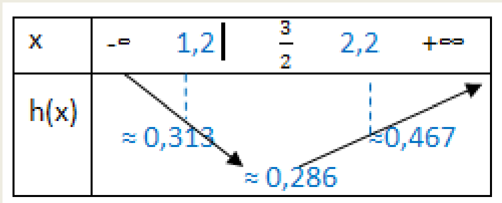


Montrons donc que l’équation $h(x) = 5$ admet une solution dans l’intervalle [3,1 ; 3,3].
La fonction h est strictement croissante et continue (car dérivable) sur [3,1 ; 3,3]. De plus $h(3,1) \approx 3,7$ et $h(3,3) \approx 7,3$.



Par le théorème des valeurs intermédiaires, l’équation $h(x) = 5$ admet une unique solution dans [3,1 ; 3,3]. On en conclut que 3,2 est une valeur approchée d’une solution de l’équation $h(x) = 5$ à 10^{-1} près.

b. $a \approx 1,7$ à 0,5 près signifie que $1,7 - 0,5 \leq a \leq 1,7 + 0,5$ soit $1,2 \leq a \leq 2,2$.
Or $h(1,2) \approx 0,313$; $h(2,2) \approx 0,467$; $h\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,286$, ce que l’on peur reporter dans le tableau ci-dessous :



Pour comparer des images par h, on doit se placer sur des intervalles où h est monotone donc ici découper [1,2 ; 2,2] en deux intervalles.
Du sens de variation de h, on déduit que :

- si $1,2 \leq a \leq \frac{3}{2}$ alors $h(1,2) \geq h(a) \geq h\left(\frac{3}{2}\right)$ d’où $0,32 \geq h(a) \geq 0,28$
- si $\frac{3}{2} \leq a \leq 2,2$ alors $h\left(\frac{3}{2}\right) \leq h(a) \leq h(2,2)$ d’où $0,28 \leq h(a) \leq 0,47$.

Donc pour tout a de [1,2 ; 2,2], on a l’encadrement $0,28 \leq h(a) \leq 0,47$.

Conseil : Attention aux choix des valeurs approchées dans les inégalités.
De $h\left(\frac{3}{2}\right) \leq h(\mathrm{a}) \leq h(2,2)$ avec $h\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0,286$ et $h(2,2) \approx 0,467$… on déduit que l'on est sûr d'avoir $0,28 \leq h(\mathrm{a}) \leq 0,47$ en élargissant l'intervalle :