

Chapitre 3 – Evaluer ses capacités – Exercice 110

1. a. Sens de variation de f_1

La fonction f_1 est définie par $f_1(x) = xe^{-x}$ sur \mathbb{R} .

On a $f_1(x) = u(x)v(x)$ où $u(x) = x, v(x) = e^{-x}$

Les fonctions u et v sont dérivables sur \mathbb{R} avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -e^{-x}$.

Donc f_1 est dérivable sur \mathbb{R} avec

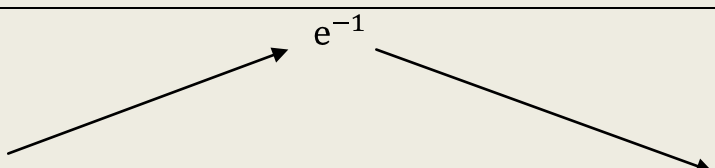
$$\begin{aligned} f_1'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x} - xe^{-x} \\ &= (1 - x)e^{-x}. \end{aligned}$$

Étudions le signe de $f_1'(x)$:

On sait que pour tout réel x , e^{-x} est strictement positif.

Donc $f_1'(x)$ a même signe que $1 - x$.

On en déduit le tableau de variations de f_1 :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
signe de $f_1'(x)$	+	0	-
variations de f_1			

La fonction f_1 est strictement croissante sur $] -\infty ; 1]$ et strictement décroissante sur $[1 ; +\infty [$.

b. On sait que k est un entier naturel supérieur ou égal à 1 par énoncé.

Or le sens de variation de f_1 étudié à la question 1 est incompatible avec la courbe C_k représentée sur le graphique. On en déduit que $k \neq 1$ donc k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2. a. ■ Pour tout $n \geq 1$, $f_n(0) = 0$ donc toutes les courbes \mathcal{C}_n passent par le point O.

▪ Il semble sur le graphique que les deux courbes tracées aient aussi comme point commun leur point d'abscisse 1. Démontrons que ce point est commun à toutes les courbes \mathcal{C}_n pour $n \geq 1$.

Pour tout $n \geq 1$, $f_n(1) = 1 \cdot e^{-1} = e^{-1}$. Donc toutes les courbes \mathcal{C}_n passent par le point de coordonnées $(1 ; e^{-1})$.

Remarque : on aurait aussi pu résoudre l'équation $f_n(x) = f_p(x)$ pour deux entiers distincts n et p supérieurs ou égaux à 1 pour trouver les points d'intersection de deux courbes \mathcal{C}_n et \mathcal{C}_p quelconques.

b. On a $f_n(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x^n$ et $v(x) = e^{-x}$.

Les fonctions u et v sont dérivables sur \mathbb{R} avec $u'(x) = nx^{n-1}$ et $v'(x) = -e^{-x}$.

La fonction f_n est donc dérivable sur \mathbb{R} avec

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = nx^{n-1}e^{-x} + x^n(-e^{-x}) \\ &= nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x} \end{aligned}$$

Sachant que $x^n = x^{n-1} \times x$, on peut factoriser par x^{n-1} :

$$f'_n(x) = x^{n-1}(n - x)e^{-x}.$$

2. En appliquant le résultat précédent à $n = 3$, on obtient :

$$f'_3(x) = x^2(3 - x)e^{-x}.$$

On sait que pour tout réel x , e^{-x} est strictement positif.

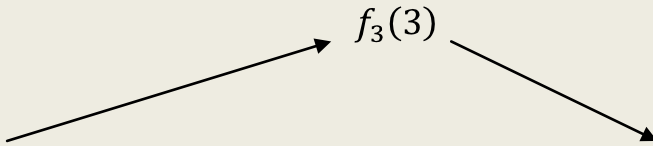
De plus pour tout réel x , x^2 est positif et ne s'annule qu'en 0.

On en déduit que $f'_3(x)$ a même signe que $(3 - x)$.

Remarque : on peut si on le souhaite établir un tableau de signes de f_3 :

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
<i>signe de x^2</i>	+	0	+	+
<i>signe de $3 - x$</i>	+		+	0
<i>signe de e^{-x}</i>	+		+	+
<i>signe du produit $x^2(3 - x)e^{-x}$.</i>	+	0	+	0

On en déduit le tableau de variations de la fonction f_3 :

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$		
signe de $f_3'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$
variations de f_3						

On déduit de ces variations que f_3 admet un maximum en 3.

4. a. La droite T_k est la tangente à la courbe C_k en son point d'abscisse 1.

Elle a donc pour équation : $y = f'_k(1)(x - 1) + f_k(1)$.

Chercher le point où elle coupe l'axe des abscisses, c'est chercher le point de cette droite d'ordonnée $y = 0$.

On cherche donc x tel que $f'_k(1)(x - 1) + f_k(1) = 0$.

Or $f'_k(1)(x - 1) + f_k(1) = 0 \Leftrightarrow f'_k(1)(x - 1) = -f_k(1)$.

D'une part $f_k(1) = e^{-1}$ et d'autre part, $f'_k(1) = 1 \cdot (k - 1)e^{-1}$ (en utilisant la formule établie en 2.b.).

Donc $f'_k(1) = (k - 1)e^{-1}$.

On en déduit que $f'_k(1)$ est non nul car $k \geq 2$ (voir question 1.b.)

Par conséquent, $f'_k(1)(x - 1) + f_k(1) = 0$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \frac{-f_k(1)}{f'_k(1)} = -\frac{e^{-1}}{(k-1)e^{-1}} = -\frac{1}{k-1}.$$

On en déduit la solution de cette équation :

$$x = 1 - \frac{1}{k-1} = \frac{(k-1)-1}{k-1} = \frac{k-2}{k-1}.$$

La tangente T_k coupe donc l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1}; 0\right)$.

b. On sait par énoncé que T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5}; 0\right)$. On a donc $\frac{k-2}{k-1} = \frac{4}{5}$ soit $5k - 10 = 4k - 4$ d'où l'on déduit que $k = 6$.