1. a. Sens de variation de f_1

La fonction f_1 est définie par $f_1(x) = xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
On a $f_1(x) = u(x)v(x)$ où $u(x) = x, v(x) = \mathrm{e}^{-x}$
Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
Donc f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec
$f_1'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \mathrm{e}^{-x} + x(-\mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x}$
$= (1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

Étudions le signe de $f_1'(x)$:
On sait que pour tout réel x, e^{-x} est strictement positif.
Donc $f_1'(x)$ a même signe que $1 - x$.

On en déduit le tableau de variations de f_1:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
signe de $f_1'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f_1		↗	e^{-1}	↘	

La fonction f_1 est strictement croissante sur $]-\infty\,; 1]$ et strictement décroissante sur $[1\,; +\infty[$.

b. On sait que k est un entier naturel supérieur ou égal à 1 par énoncé.
Or le sens de variation de f_1 étudié à la question 1 est incompatible avec la courbe C_k représentée sur le graphique. On en déduit que $k \neq 1$ donc k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2. a. ▪ Pour tout $n \geq 1$, $f_n(0) = 0$ donc toutes les courbes C_n passent par le point O.

▪ Il semble sur le graphique que les deux courbes tracées aient aussi comme point commun leur point d'abscisse 1. Démontrons que ce point est commun à toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ pour $n \geq 1$.
Pour tout ≥ 1, $f_n(1) = 1.\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1}$. Donc toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par le point de coordonnées $(1\,;\mathrm{e}^{-1})$.

Remarque : on aurait aussi pu résoudre l'équation $f_n(x) = f_p(x)$ pour deux entiers distincts n et p supérieurs ou égaux à 1 pour trouver les points d'intersection de deux courbes $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_p$ quelconques.

b. On a $f_n(x) = u(x)v(x)$ avec $u(x) = x^n$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = nx^{n-1}$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
La fonction f_n est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = nx^{n-1}\,\mathrm{e}^{-x} + x^n(-\mathrm{e}^{-x}) \\ &= nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x} - x^n\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Sachant que $x^n = x^{n-1} \times x$, on peut factoriser par x^{n-1}:

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

2. En appliquant le résultat précédent à $n = 3$, on obtient :

$f_3'(x) = x^2(3-x)\mathrm{e}^{-x}$.

On sait que pour tout réel x, e^{-x} est strictement positif.
De plus pour tout réel x, x^2 est positif et ne s'annule qu'en 0.
On en déduit que $f_3'(x)$ a même signe que $(3-x)$.

Remarque : on peut si on le souhaite établir un tableau de signes de f_3:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
signe de x^2		+	0	+		+	
signe de $3-x$		+		+	0	–	
signe de e^{-x}		+		+		+	
signe du produit $x^2(3-x)e^{-x}$.		+	0	+	0	–	

On en déduit le tableau de variations de la fonction f_3 :

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
signe de $f_3'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	
variations de f_3		$\nearrow$		$\nearrow$	$f_3(3)$	$\searrow$	

On déduit de ces variations que f_3 admet un maximum en 3.

4. a. La droite T_k est la tangente à la courbe C_k en son point d'abscisse 1.
Elle a donc pour équation : $y = f_k'(1)(x-1) + \ f_k(1)$.
Chercher le point où elle coupe l'axe des abscisses, c'est chercher le point de cette droite d'ordonnée $y = 0$.

On cherche donc x tel que $f_k'(1)(x-1) + \ f_k(1) = 0$.
Or $f_k'(1)(x-1) + \ f_k(1) = 0 \Leftrightarrow f_k'(1)(x-1) = \ -f_k(1)$.

D'une part $f_k(1) = \ \mathrm{e}^{-1}$ et d'autre part, $f_k'(1) = \ 1.(k-1)\mathrm{e}^{-1}$ (en utilisant la formule établie en 2.b.).
Donc $f_k'(1) == (k-1)\mathrm{e}^{-1}$.
On en déduit que $f_k'(1)$ est non nul car $k \geq 2$ (voir question 1.b.)

Par conséquent, $f_k'(1)(x-1) + \ f_k(1) = 0$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \frac{-f_k(1)}{f_k'(1)} = -\frac{\mathrm{e}^{-1}}{(k-1)\mathrm{e}^{-1}} = \ -\frac{1}{k-1}.$$

On en déduit la solution de cette équation :

$$x = 1 - \frac{1}{k-1} = \frac{(k-1)-1}{k-1} = \frac{k-2}{k-1}.$$

La tangenteT_k coupe donc l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1}\ ; 0\right)$.

b. On sait par énoncé que T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5}; 0\right)$. On a donc $\frac{k-2}{k-1} = \frac{4}{5}$ soit $5k - 10 = 4k - 4$ d'où l'on déduit que $k = 6$.