Soit $g(x) = x + k\mathrm{e}^{ax}$.

1.Élaborons une démarche : pour déterminer $g(x)$ qui contient deux paramètres k et a, on a besoin de deux équations aux inconnues k et a.

On doit donc exploiter deux renseignements donnés dans l'énoncé sur la fonction g.

Par énoncé, la droite (EF) est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en F. Ceci donne les deux renseignements suivants:
- le point F appartient à la courbe $\mathcal{C}$
- la tangente en F à la courbe $\mathcal{C}$ a pour coefficient directeur celui de la droite (EF) (non verticale)

Connaissant les coordonnées de E et F, on peut traduire ces deux renseignements par deux égalités portant sur la fonction g .

▪ Dire que le point F appartient à $\mathcal{C}$ signifie que $g(0) = 6$.
Or $g(0) = 0 + k \times 1 = k$. On en déduit que $k = 6$.

▪ La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en F a pour coefficient directeur $g'(0)$ car g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0. De plus $g'(x) = 1 + ka\mathrm{e}^{ax}$ donc $g'(0) = 1 + ka$.
Le coefficient directeur de (EF) est $\frac{y_F - y_E}{x_F - x_E} = -2$.
Donc $1 + ka = -2$ soit $1 + 6a = -2$ d'où $a = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$.

On en déduit que $g(x) = x + 6\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

2. La tangente en B à la courbe $\mathcal{C}$ a pour coefficient directeur $g'(x_B)$.
On cherche donc x tel que $g'(x) = 0$.
Or $g'(x) = 1 + 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = 1 - 3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$,
donc $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = \ln\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -2\ln\frac{1}{3}$.

Le point B a donc pour abscisse $x_B = \ln \frac{1}{3}$.

Son ordonnée est $y_B = g(x_B) = x_B + 6\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x_B}$ où $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x_B} = \frac{1}{3}$

donc $y_B = -2\ln\frac{1}{3} + \frac{6}{3} = -2\ln\frac{1}{3} + 2$.

On a donc les coordonnées de B : $\left(-2\ln\frac{1}{3}\ ;\ -2\ln\frac{1}{3} + 2\right)$.

Conseil

On cherche des valeurs approchées pour contrôler graphiquement ces résultats. On obtient à la calculatrice $x_B \approx 2{,}2$ et $y_B \approx 4{,}2$ ce qui semble cohérent avec le graphique proposé.