On suppose savoir que :

(1) $e^0 = 1$

(2) pour tout x, y réels, $\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y}$.

Démontrons par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$, $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$ où x est un réel.

① Initialisation

Montrons que l'égalité $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$ est vraie pour $n = 0$.

Pour $n = 0$, $(\mathrm{e}^x)^0 = 1$ car e^xest un réel non nul et pour tout réel non nul a, on a $a^0 = 1$ par convention.

Pour $n = 0$, $\mathrm{e}^{nx} = \mathrm{e}^0 = 1$ par (1).

Par conséquent, l'égalité $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$ est vraie pour $n = 0$.

② Hérédité

Soit n un entier naturel. Supposons que pour cet entier n, on ait l'égalité $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$.

Montrons que l'égalité est vraie pour $n + 1$ c'est-à-dire que :

$$(\mathrm{e}^x)^{n+1} = \mathrm{e}^{(n+1)x}.$$

On a $(\mathrm{e}^x)^{n+1} = (\mathrm{e}^x)^n \times \mathrm{e}^x$ par propriété des puissances ($a^{n+1} = a^n \times a$).

Par hypothèse de récurrence, $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$.

On en déduit que $(\mathrm{e}^x)^{n+1} = \mathrm{e}^{nx} \times \mathrm{e}^x$.

Par (2), on peut écrire que $\mathrm{e}^{nx} \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{nx+x}$ soit $\mathrm{e}^{nx} \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{(n+1)x}$.

On a donc $(\mathrm{e}^x)^{n+1} = \mathrm{e}^{nx} \times \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{(n+1)x}$.

③ Conclusion

L'égalité étant vérifiée pour $n = 0$ et héréditaire à partir du rang 0, elle est vraie pour tout entier naturel n. On a donc démontré que pour tout n de $\mathbb{N}$, $(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}$.