On suppose savoir que la fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $g'(x) = g(x)$ pour tout x réel et $g(0) = 1$.

On cherche $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h - 1}{h}$.

On remarque que $\frac{e^h-1}{h} = \frac{\exp(h)-\exp(0)}{h-0}$ qui est de la forme $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ avec pour f la focntion exp et $a = 0$.

Ainsi donc chercher la limite quand h tend vers 0 du rapport $\frac{e^h-1}{h}$, c'est étudier la dérivabilité de la fonction exp en 0.

Or dire que la fonction exponentielle est une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $g'(x) = g(x)$ pour tout x réel et $g(0) = 1$, c'est dire que exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout x réel, $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.

En particulier exp est dérivable en 0 et $\exp'(0) = \exp(0) = 1$.

On en déduit que : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h - 1}{h} = \exp'(0) = 1$.