Exercice guidé page 44

1. a. Sens de variation de g

La fonction g est une fonction polynôme dérivable sur [0 ; 1].
Le sens de variation de g est donné par le signe de sa dérivée.
On a $g(x) = u(x)^3$ avec $u(x) = x - 1$.

Donc $g'(x) = 3u'(x)u(x)^2 = 3 \times 1 \times (x-1)^2 = 3\,(x-1)^2$.

On en déduit que $g'(x) \geqslant 0$ sur [0 ; 1], ne s'annulant qu'en 1, donc g est strictement croissante sur [0 ; 1].

Équation $g(x) = -\frac{1}{4}$

On peut s'aider du tableau de variations de la fonction g en plaçant $-\frac{1}{4}$:

x	0	?	1
Variations de g	-1	$-\frac{1}{4}$	0

Justifions que l'équation $g(x) = -\frac{1}{4}$ a une unique solution dans [0 ; 1] en appliquant la propriété 3 page 40 :

- La fonction g est continue car dérivable sur [0 ; 1].
- De plus g est strictement croissante sure [0 ; 1].
- Comme $g(0) = -1$ et $g(1) = 0$, on a $-\frac{1}{4} \in [g(0)\,;\,g(1)]$.

Par suite, l'équation $g(x) = -\frac{1}{4}$ a une unique solution dans l'intervalle [0 ; 1].

b. On utilise la méthode de balayage en obtenant un tableau de valeurs de g avec un pas de 0,1 :

X	Y1	
0	-1	
.1	-.729	
.2	-.512	
.3	-.343	
.4	-.216	
.5	-.125	
.6	-.064	

On constate que $g(0,3) < -\frac{1}{4} < g(0,4)$.

On déduit, du fait de la stricte croissance de g, que $0,3 < \alpha < 0,4$.

2. a. La fonction f est une fonction polynôme dérivable sur [0 ; 1].

De $f(x)=u(x)^4$ avec $u(x)=x-1$, on déduit que sur [0 ; 1] :

$f'(x)=4u'(x)u(x)^3=4(x-1)^3$,

ou encore $f'(a)=4(a-1)^3$ pour tout a de [0 ; 1].

b. $f'(a)=-1 \Leftrightarrow 4(a-1)^3=-1 \Leftrightarrow 4g(a)=-1 \Leftrightarrow g(a)=-\dfrac{1}{4}$.

Par la question 1.a, on en déduit que l'équation $f'(a)=-1$ a pour unique solution α dans [0 ; 1].

c. Le coefficient directeur de la droite (PR) est $\dfrac{y_R-y_P}{x_R-x_P}=-1$.

Pour tout a de [0 ;1], la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse a a pour coefficient directeur $f'(a)$.

Cette tangente est parallèle à la droite (PR) si et seulement si les coefficients directeurs de ces deux droites sont égaux c'est-à-dire $f'(a)=-1$.

La courbe $\mathscr{C}$ a donc une unique tangente parallèle à (PR) : il s'agit de sa tangente en son point d'abscisse α.

2. Comme α est solution de l'équation $g(x)=-\dfrac{1}{4}$, on a $g(\alpha)=-\dfrac{1}{4}$ c'est-à-dire $(\alpha-1)^3=-\dfrac{1}{4}$.

Alors $f(a)=(\alpha-1)^4=(\alpha-1)^3(\alpha-1)=-\dfrac{1}{4}(\alpha-1)$.

Notons k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=-\dfrac{1}{4}(x-1)$.

Dire que $f(\alpha)=k(\alpha)$ signifie que α est l'abscisse d'un point d'intersection des courbes représentant les fonctions f et k.

Autrement dit α est l'abscisse d'un point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de la droite d d'équation : $y=-\dfrac{1}{4}(x-1)$.

On construit donc la droite d qui coupe $\mathscr{C}$ en un seul point A $(\alpha; f(\alpha))$ puis on place l'abscisse α de A .

On construit ensuite la tangente T à $\mathscr{C}$ en A comme la parallèle à (PR) passant par A.