## Exercice 79

**1. a.** Il semble que la fonction $f$ soit décroissante sur [– 4 ; – 2,5] et croissante sur [– 2,5 ; 0].
**b.** La droite T semble être la droite d'équation $y = 2x$.

**2. a.** Grâce aux réponses 2 et 4 on sait que sur [– 4 ; 0], $f'(x) = g(x)$ et que $g(x) < 0 \Leftrightarrow x > -4$ et $x < -\frac{8}{3}$.

Autrement dit, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -4 < x < -\frac{8}{3}$.

On remarque de plus que $g\left(-\frac{8}{3}\right) = 0$ donc $f'\left(-\frac{8}{3}\right) = 0$.

En revanche $g$ n'est pas définie en – 4 car $g(x) = \frac{(3x+8)\sqrt{x+4}}{2(x+4)} = \frac{3x+8}{2\sqrt{x+4}}$.

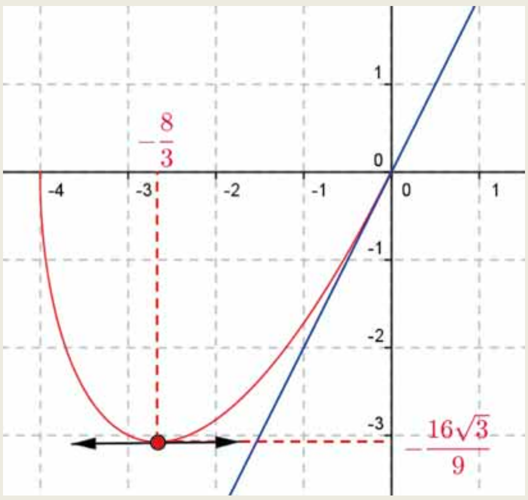
On sait enfin que $f\left(-\frac{8}{3}\right) = -\frac{16\sqrt{3}}{9}$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-4$ | | $-\frac{8}{3}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{16\sqrt{3}}{9}$ | $\nearrow$ | $0$ |

**Conseils**
Vérifier que ces résultats sont cohérents avec la conjecture émise en question 1.a.
car $-\frac{8}{3} \approx -2{,}66$.

**b.**




**Conseils**

Vérifier que $-\frac{16\sqrt{3}}{9} \approx -3$.

**c.** T a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

Or $f'(0) = g(0) = \dfrac{8\sqrt{4}}{8} = 2$ et $f(0) = 0$ donc T a pour équation $y = 2x$.

**Conseils**

Vérifier que ce résultat est cohérent avec la conjecture émise en question 1.b.

**3.** • Retrouvons la réponse 2

Déterminons la dérivée de la fonction $f$.

Sur $[-4\,;0]$, la fonction $f$ est le produit des fonctions $k:\ x \mapsto x$ et $h: x \mapsto \sqrt{x+4}$.

La fonction $h: x \mapsto \sqrt{x+4}$ est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x+4$. La fonction $u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $]-4\,;+\infty[$. Donc la fonction $h$ est dérivable sur $]-4\,;+\infty[$ et $h'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}$.

La fonction $k$ est dérivable aussi sur $]-4\,;+\infty[$.

Par conséquent, la fonction $f$ (définie sur $[-4\,;0]$) est dérivable sur $]-4\,;0]$

et $f'(x) = h'(x)k(x) + h(x)k'(x)$, soit $f'(x) = \sqrt{x+4} + x\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}$.

On retrouve ici le résultat donné en réponse 2 par le logiciel en remplaçant $\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$ par $(\sqrt{x+4})^{-1}$.

- Retrouvons la réponse 3

On a établi que $f'(x) = \sqrt{x+4} + x\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}$.

En réduisant au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x+4} \times 2\sqrt{x+4} + x}{2\sqrt{x+4}} = \frac{2\sqrt{x+4}^{\,2} + x}{2\sqrt{x+4}} = \frac{2(x+4)+x}{2\sqrt{x+4}} = \frac{3x+8}{2\sqrt{x+4}}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $\sqrt{x+4}$ :

$$f'(x) = \frac{(3x+8)\sqrt{x+4}}{2\sqrt{x+4}^{\,2}} = \frac{(3x+8)\sqrt{x+4}}{2(x+4)} = \frac{(3x+8)\sqrt{x+4}}{2x+8}.$$

On a ainsi retrouvé le résultat donné par le logiciel en Réponse 3.

- Retrouvons la réponse 4

Il s'agit d'étudier le signe de $\dfrac{(3x+8)\sqrt{x+4}}{2x+8}$ sur $]-4\,;0]$.

On peut dresser un tableau de signes :

| $x$ | $-4$ | | $-\frac{8}{3}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| signe de $3x+8$ | | $-$ | | $+$ | |
| signe de $\sqrt{x+4}$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| signe de $2x+8$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| signe de $g(x)$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**Conseils**

On peut éviter ce tableau de signes en remarquant que pour $-4 < x \leqslant 0$, $\sqrt{x+4}$ et $2x+8$ sont tous les deux positifs. De ce fait $g(x)$ a même signe que $3x+8$.