Exercice 77

1. Le sens de variation de V est donné par le signe de sa dérivée.
V est dérivable sur [0 ; 4] comme fonction polynôme
et $V'(x) = -3x^2 + 8x = x(-3x + 8)$.
Sur [0 ; 4], x est positif donc $V'(x)$ a même signe que $-3x + 8$.
On en déduit le tableau de variations de V :

x	0		$\frac{8}{3}$		4
$V'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{256}{27}$	$\searrow$	0

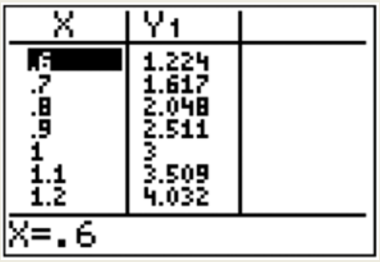
2. $V\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{256}{27} \approx 9{,}5$ à 0,1 près, donc 2 appartient à $\left[0\,;V\left(\frac{8}{3}\right)\right]$.
On peut ajouter 2 comme image dans le tableau :

x	0		$\frac{8}{3}$		4
$V'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$V(x)$	0	$\nearrow$ 2	$\frac{256}{27}$	2 $\searrow$	0

La fonction V étant continue (car dérivable) et strictement croissante sur $\left[0\,;\frac{8}{3}\right]$, l'équation $V(x) = 2$ a une unique solution sur $\left[0\,;\frac{8}{3}\right]$.

De même V étant continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{8}{3};4\right]$, l'équation $V(x) = 2$ a une unique solution sur $\left[\frac{8}{3};4\right]$.
$\frac{8}{3}$ n'étant pas solution, l'équation $V(x) = 2$ admet donc deux solutions α et β avec $\alpha < \frac{8}{3} < \beta$.

3. Utilisons la méthode de balayage pour déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
La fonction V est entrée sur la calculatrice. On obtient la table de valeurs suivante avec un pas de 0,1 :



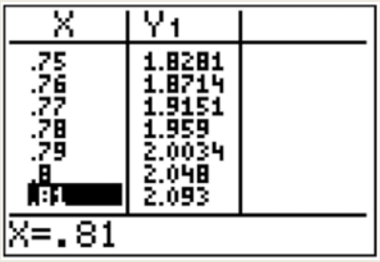
Conseils

On peut imaginer le tableau de variations partiel :

x	… 0,7	α	0,8	….
$V(x)$	$\approx 1{,}617$	2	$\approx 2{,}048$	

On constate que $V(0,7) < 2 < V(0,8)$ donc par croissance de V sur $\left[0\,;\frac{8}{3}\right]$, on en déduit que $0,7 < \alpha < 0,8$.

Avec un pas de 0,01 on obtient alors la table de valeurs suivante :



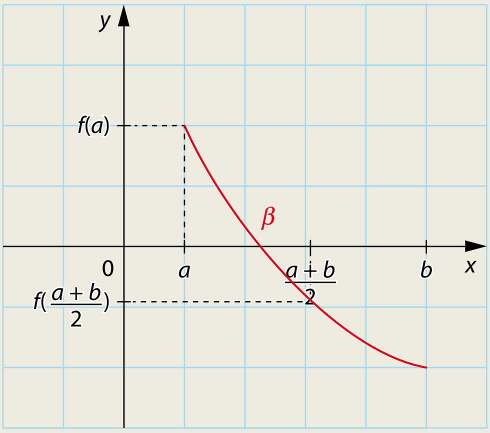
On en déduit de même que $0{,}78 < \alpha < 0{,}79$.
Donc $\alpha \approx 0{,}79$ à 10^{-2} près.

4. L'équation $V(x) = 2$ est équivalente à l'équation $f(x) = 0$.
De plus la fonction f a même sens de variation que la fonction V sur [0 ; 4].
L'algorithme calcule les bornes a et b d'intervalles successifs obtenus par dichotomie donc qui appartiennent tous à l'intervalle $\left[\frac{8}{3}\,;4\right]$.

Le premier intervalle est $[a\,;b] = \left[\frac{8}{3}\,;4\right]$, qui contient β.

Observons le corps de la boucle « Tantque … FinTantque » lors du premier passage dans la boucle :
Il y a deux cas :

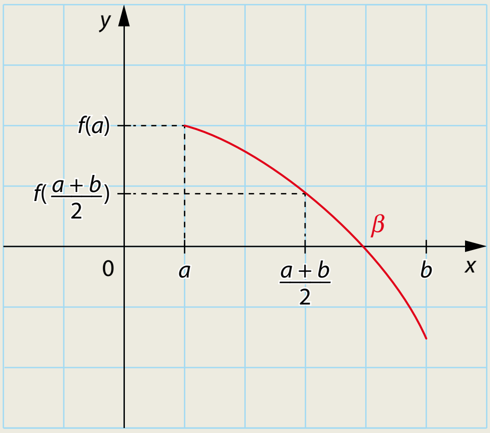
$\beta \in \left[a\,;\dfrac{a+b}{2}\right]$



$f(a) \geqslant 0$ et $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant 0$

donc $f(a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant 0.$

$\beta \notin \left[a\,;\dfrac{a+b}{2}\right]$



$f(a) > 0$ et $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0$

donc $f(a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0.$

Par conséquent :

- si la condition $f(a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0$ est vérifiée, $\beta \notin \left[a\,;\dfrac{a+b}{2}\right]$.

Dans ce cas $[a\,;b]$ est remplacé par $\left[\dfrac{a+b}{2};b\right]$ qui contient donc β.

- si la condition $f(a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0$ n'est pas vérifiée, on a $f(a)$ et $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ de signes contraires

donc β appartient à l'intervalle $\left[a\,;\dfrac{a+b}{2}\right]$.

Dans ce cas $[a\,;b]$ est remplacé par $\left[a\,;\dfrac{a+b}{2}\right]$ qui contient β.

À chaque passage dans la boucle « Tantque … FinTantque » l'intervalle $[a\,;b]$ est donc remplacé par un intervalle de longueur deux fois plus petite et contenant toujours β.
On sort de la boucle « Tantque … FinTantque » quand $b - a \leqslant 10^{-6}$.
Par conséquent l'algorithme fournit les bornes a et b d'un encadrement $a < \beta < b$ de β d'amplitude au plus 10^{-6}.