Exercice 76

1. Par convention (voir manuel page 40), ce tableau de variations est celui d'une fonction continue sur [– 1 ; 2].

2. Équation

x	-1	?	0	$0,75$	2
$f(x)$	5	$\searrow$ 0	-1	$\nearrow$ 0	3

MÉTHODE
Chercher x solution de $f(x)=0$ c'est chercher les réels x qui ont pour image 0 par f.
On s'aide du tableau de variations en plaçant 0 comme image.

Cette équation a deux solutions, une dans [– 1 ; 0] et une dans [0 ; 2] qui est 0,75.
On peut justifier ce résultat à l'aide de la continuité et du sens de variation de f :
- sur [0 ; 1], f est continue et strictement décroissante avec $f(-1)=5$ et $f(0)=-1$.

Donc 0 appartient à $[f(0)\ ;f(-1)]$.
Par la propriété 3 page 40, on en déduit que l'équation $f(x)=0$ a une unique solution dans l'intervalle [– 1 ; 0].
- sur [0 ; 2], f s'annule en 0,75 et du fait de la stricte croissance de f, $f(x)<0$ sur [0 ; 0,75[et $f(x)>0$ sur]0,75 ; 2].

Donc $f(x) = 0$ n'a qu'une solution dans l'intervalle [0 ; 2].

Équation $f(x) = 4$

x	-1	?	0	$0,75$	2
$f(x)$	5	$\searrow$ 4	-1	$\nearrow$ 0	3

Cette équation n'a qu'une solution et celle-ci appartient à [– 1 ; 0].
Justifions-le :
- sur [– 1 ; 0], comme précédemment, f est continue et strictement décroissante et 4 appartient à $[f(0)\ ;f(-1)]$.

donc l'équation $f(x)=4$ a une unique solution.
- sur [0 ; 2], f a pour maximum 3 donc l'équation $f(x)=4$ n'a pas de solution.

Équation $f(x)=-1$

Cette équation a 0 pour unique solution.
En effet, 0 est solution car $f(0)=-1$.
Et il n'y a pas d'autre solution car si $x<0$, $f(x)>-1$ et si $x>0$, $f(x)>-1$ du fait du sens de variation de f.

Équation $f(x) = -3$

Cette équation n'a pas de solution. En effet f admet -1 pour minimum sur [– 1 ; 2] donc f ne prend jamais la valeur -3.

3. Les exemples précédents servent de guide. On peut aussi imaginer une courbe représentant f pour s'aider d'une lecture graphique.

- Si $m < -1$, l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution (même raisonnement que pour l'équation $f(x) = -3$).
- Si $m = -1$, l'équation $f(x) = m$ a 0 pour unique solution (voir question 2).
- Si $-1 < m \leqslant 3$, l'équation $f(x) = m$ a deux solutions (même raisonnement que pour l'équation $f(x) = 0$).

x	-1	?	0	?	2
$f(x)$	5	$\searrow$ m	-1	$\nearrow$ m	3

- Si $3 < m \leqslant 5$, l'équation $f(x) = m$ a une unique solution (même raisonnement que pour l'équation $f(x) = 4$).

x	-1	?	0		2
$f(x)$	5	$\searrow$ m	-1	$\nearrow$	3

- Si $m > 5$, l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution (car le maximum de f sur [– 1 ; 2] est 5).