

Exercice 76

1. Par convention (voir manuel page 40), ce tableau de variations est celui d'une fonction continue sur $[-1 ; 2]$.

2. Équation

x	-1	?	0	0,75	2
$f(x)$	5		-1		3

Diagramme de variation : une flèche descendante de 5 à -1 est marquée d'un 0, et une flèche ascendante de -1 à 3 est marquée d'un 0.

MÉTHODE

Chercher x solution de $f(x) = 0$ c'est chercher les réels x qui ont pour image 0 par f .
On s'aide du tableau de variations en plaçant 0 comme image.

Cette équation a deux solutions, une dans $[-1 ; 0]$ et une dans $[0 ; 2]$ qui est 0,75.

On peut justifier ce résultat à l'aide de la continuité et du sens de variation de f :

- sur $[0 ; 1]$, f est continue et strictement décroissante avec $f(-1) = 5$ et $f(0) = -1$.

Donc 0 appartient à $[f(0) ; f(-1)]$.

Par la propriété 3 page 40, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans l'intervalle $[-1 ; 0]$.

- sur $[0 ; 2]$, f s'annule en 0,75 et du fait de la stricte croissance de f , $f(x) < 0$ sur $[0 ; 0,75[$ et $f(x) > 0$ sur $]0,75 ; 2]$.

Donc $f(x) = 0$ n'a qu'une solution dans l'intervalle $[0 ; 2]$.

Équation $f(x) = 4$

x	-1	?	0	0,75	2
$f(x)$	5		-1		3

Diagramme de variation : une flèche descendante de 5 à -1 est marquée d'un 4, et une flèche ascendante de -1 à 3 est marquée d'un 0.

Cette équation n'a qu'une solution et celle-ci appartient à $[-1 ; 0]$.

Justifions-le :

- sur $[-1 ; 0]$, comme précédemment, f est continue et strictement décroissante et 4 appartient à $[f(0) ; f(-1)]$.

donc l'équation $f(x) = 4$ a une unique solution.

- sur $[0 ; 2]$, f a pour maximum 3 donc l'équation $f(x) = 4$ n'a pas de solution.

Équation $f(x) = -1$

Cette équation a 0 pour unique solution.

En effet, 0 est solution car $f(0) = -1$.

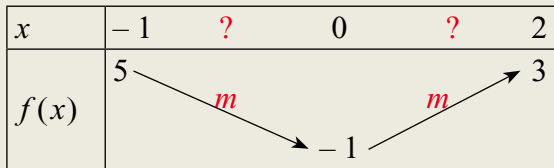
Et il n'y a pas d'autre solution car si $x < 0$, $f(x) > -1$ et si $x > 0$, $f(x) > -1$ du fait du sens de variation de f .

Équation $f(x) = -3$

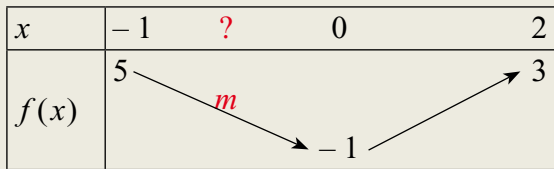
Cette équation n'a pas de solution. En effet f admet -1 pour minimum sur $[-1 ; 2]$ donc f ne prend jamais la valeur -3 .

3. Les exemples précédents servent de guide. On peut aussi imaginer une courbe représentant f pour s'aider d'une lecture graphique.

- Si $m < -1$, l'équation $f(x) = m$ n'a aucune solution (même raisonnement que pour l'équation $f(x) = -3$).
- Si $m = -1$, l'équation $f(x) = m$ a 0 pour unique solution (voir question 2).
- Si $-1 < m \leq 3$, l'équation $f(x) = m$ a deux solutions (même raisonnement que pour l'équation $f(x) = 0$).



- Si $3 < m \leq 5$, l'équation $f(x) = m$ a une unique solution (même raisonnement que pour l'équation $f(x) = 4$).



- Si $m > 5$, l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution (car le maximum de f sur $[-1 ; 2]$ est 5).