

Chapitre 2 - Aide - Exercice 4 Question e

Théorème de stricte monotonie (admis)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un **intervalle** I .

- Si $f'(x) = 0$ sur I alors f est constante sur I .
- Si $f'(x) > 0$ pour tout x de I , sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
- Si $f'(x) < 0$ pour tout x de I , sauf éventuellement pour un nombre fini de valeurs de x où f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

3 Étudier le sens de variation d'une fonction polynôme

Énoncé

Étudier le sens de variation de la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Solution

La fonction f est une fonction polynôme dérivable sur \mathbb{R} .

Étudions le signe de $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1).$$

Il s'agit d'un trinôme de degré 2 dont les racines sont 1 et -1 .

Le théorème sur le signe du trinôme donne ce tableau de signe :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+

Sur l'intervalle $]-\infty; -1]$, on a $f'(x) > 0$ sauf en -1 où f' s'annule.

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty; -1]$.

De même, f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$, strictement décroissante sur $[-1; 1]$.

En pratique, on ajoute une ligne donnant le sens de variation de f sous le signe de $f'(x)$:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+
variation de f	↗ 3 ↘	↗ -1 ↘	↗	↗	

MÉTHODE

Pour étudier le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle, on peut étudier le signe de sa dérivée sur cet intervalle puis appliquer le théorème de stricte monotonie sur différents intervalles.