1. Interroger un individu au hasard peut être considérée comme une épreuve de Bernoulli à deux issues S : « être favorable au candidat C » de probabilité p et $\overline{S}$.
Un tirage aléatoire de n individus avec remise consiste en la répétition de cette épreuve, n fois, de façon identique et indépendante. On reconnaît donc un schéma de Bernoulli et la variable X_n qui donne le nombre de votants en faveur de C compte le nombre de réalisation de l'événement S.

Elle suit donc la loi binomiale de paramètres n et p.

2. a. On a $F_n = \frac{X_n}{n}$.

Donc la condition $F_n \in I_n(p)$ c'est-à-dire $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$ équivaut à $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$ ce qui peut encore s'écrire :
$np - \sqrt{n} \leq X_n \leq np + \sqrt{n}$.

b. La condition $F_{100} \in I_{100}\ (0{,}5)$ s'écrit donc, d'après la question a.,

$100 \times 0{,}5 - \sqrt{100} \leq X_{100} \leq 100 \times 0{,}5 + \sqrt{100}$ soit $40 \leq X_{100} \leq 60$.

On en déduit que $P(F_{100} \in I_{100}\ (0{,}5)) = P(40 \leq X_{100} \leq 60)$ où la variable aléatoire X_{100} suit la loi binomiale $\mathcal{B}(100\ ;\ 0{,}5)$.

A la calculatrice, on obtient $P(40 \leq X_{100} \leq 60)$ en calculant

$P(X_{100} \leq 60) - P(X_{100} \leq 39) \approx 0{,}96$ à 0,01 près.

Aides calculatrice :

Sur Casio Graph 35 + : binomCD(60,100,0.5)-binomCD(39,100,0.5)

Sur Ti 83 : binomRép(100,0.5,60)-binomRép(100,0.5,39)

c. On suppose que $P(F_n \in I_n(p)) \geq 0{,}95$.

Dire que $F_n \in I_n(p)$, c'est dire que $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Or $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$ équivaut successivement à

$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n - p \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ (en retranchant p à chaque membre)

$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq -F_n + p \geq -\frac{1}{\sqrt{n}}$ (en multipliant par -1)

$F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq p \geq F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}$ (en ajoutant F_n à chaque membre)

Donc $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

On en déduit que $P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$,

donc $P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}95$.

Remarque

$p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$ équivaut à $F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Les deux encadrements, équivalents à $-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n - p \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ autrement dit à $|F_n - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, expriment tous les deux que la distance entre F_n et p est inférieure à $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. a. De la question c., on déduit que $J_n = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

b. Avec $f = 0{,}51$ et $n = 100$, $J_{100} = [0{,}41 ; 0{,}61]$.

Avec $f = 0{,}51$ et $n = 1\,000$, $J_{1000} = [0{,}48 ; 0{,}54]$.

Remarque

L'intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % est dans les deux cas centré en $f = 0{,}51$. Sa longueur dépend de la taille de l'échantillon considéré, à savoir 100 ou 1000 dans cette question.

c. La longueur de J_n est $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

On cherche donc n tel que $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0{,}04$.

On obtient $n \geq \left(\frac{2}{0{,}04}\right)^2$ d'où $n \geq 2\,500$.

Il aurait donc fallu interroger 2 500 personnes pour obtenir un intervalle de confiance de longueur inférieure ou égale à 0,04.