

## Chapitre 14 – Exercice guidé page 440

**1. a.** Prendre une plage au hasard peut être considérée comme une épreuve de Bernoulli à deux issues S : « la plage est atteinte par les algues » de probabilité 0,1 et  $\bar{S}$ .

Un tirage aléatoire de  $n$  plages avec remise consiste en la répétition de cette épreuve,  $n$  fois, de façon identique et indépendante. On reconnaît donc un schéma de Bernoulli et la variable  $X_n$  qui donne le nombre de plages atteintes par les algues compte le nombre de réalisation de l'événement S.

Elle suit donc la loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p = 0,1$ .

**b.** L'intervalle de fluctuation asymptotique  $I_n$  au seuil de 95% de la variable aléatoire  $F_n$  est  $I_n = \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ , soit avec  $p = 0,1$  :

$$I_n = \left[ 0,1 - 1,96 \frac{0,3}{\sqrt{n}} ; 0,1 + 1,96 \frac{0,3}{\sqrt{n}} \right] = \left[ 0,1 - \frac{0,588}{\sqrt{n}} ; 0,1 + \frac{0,588}{\sqrt{n}} \right].$$

On cherche  $n$  tel que l'on ait à la fois  $n \geq 30$ ,  $np \geq 5$  et  $n(1-p) \geq 5$  c'est-à-dire  $n \geq 30$ ,  $n \geq \frac{5}{0,1}$  soit  $n \geq 50$ , et  $n \geq \frac{5}{0,9}$  soit  $n \geq \frac{50}{9}$ .

Ceci équivaut à  $n \geq 50$ .

*Remarque*

Il faut connaître la formule générale de l'intervalle de fluctuation asymptotique donné dans le théorème 1 page 436, mais il faut aussi connaître deux valeurs remarquables qui interviennent souvent dans la pratique :

- la valeur  $t_\alpha = 1,96$  donc le cas d'un seuil de 95%
- la valeur  $t_\alpha = 2,58$  pour un seuil de 99%.

c. Le rayon de l'intervalle  $I_n$  est  $\frac{0,588}{\sqrt{n}}$ .

On cherche donc  $n \geq 50$  (par la question b.) et tel que  $\frac{0,588}{\sqrt{n}} \leq 0,05$ .

Or  $\frac{0,588}{\sqrt{n}} \leq 0,05 \Leftrightarrow \frac{0,588}{0,05} \leq \sqrt{n} \Leftrightarrow 11,76 \leq \sqrt{n} \Leftrightarrow 11,76^2 \leq n$ .

Le rayon de  $I_n$  est donc inférieur ou égal à 0,05 pour  $n \geq n_0$  avec  $n_0 = 139$ .

2. Calculons l'intervalle  $I_{n_0}$  :  $I_{n_0} = \left[ 0,1 - \frac{0,588}{\sqrt{139}} ; 0,1 + \frac{0,588}{\sqrt{139}} \right] \approx [0,05 ; 0,15]$ .

La règle de décision est la suivante :

On calcule la fréquence  $f$  de plages atteintes par les algues dans l'échantillon de 139 plages. Il y a alors deux cas :

- Si  $f$  appartient à l'intervalle  $I_{n_0}$  on ne rejette pas l'hypothèse  $p = 0,1$ .
- Si  $f$  n'appartient pas à l'intervalle  $I_{n_0}$  on rejette l'hypothèse  $p = 0,1$  au seuil de décision de 5%.

*Remarque*

La démarche mise en œuvre ici est à bien connaître ; elle est énoncée dans le cours partie C page 438. Il est possible que l'on rejette à tort l'hypothèse ... la probabilité de le faire est environ égale à 0,05. Le seuil de décision correspond à ce risque.

3. On applique la règle énoncée précédemment avec  $f = \frac{11}{139} \approx 0,079$ .

Comme  $f$  appartient à l'intervalle  $I_{n_0}$ , on ne rejette pas l'hypothèse  $p = 0,1$ .