

Chapitre 14 – Exercice guidé page 440

1. a. Prendre une plage au hasard peut être considérée comme une épreuve de Bernoulli à deux issues S : « la plage est atteinte par les algues » de probabilité $0,1$ et \bar{S} .

Un tirage aléatoire de n plages avec remise consiste en la répétition de cette épreuve, n fois, de façon identique et indépendante. On reconnaît donc un schéma de Bernoulli et la variable X_n qui donne le nombre de plages atteintes par les algues compte le nombre de réalisation de l'événement S .

Elle suit donc la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,1$.

b. L'intervalle de fluctuation asymptotique I_n au seuil de 95% de la variable

aléatoire F_n est $I_n = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$,

soit avec $p = 0,1$:

$$I_n = \left[0,1 - 1,96 \frac{0,3}{\sqrt{n}} ; 0,1 + 1,96 \frac{0,3}{\sqrt{n}} \right] = \left[0,1 - \frac{0,588}{\sqrt{n}} ; 0,1 + \frac{0,588}{\sqrt{n}} \right].$$

On cherche n tel que l'on ait à la fois $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$

c'est-à-dire $n \geq 30$, $n \geq \frac{5}{0,1}$ soit $n \geq 50$, et $n \geq \frac{5}{0,9}$ soit $n \geq \frac{50}{9}$.

Ceci équivaut à $n \geq 50$.

Remarque

Il faut connaître la formule générale de l'intervalle de fluctuation asymptotique donné dans le théorème 1 page 436, mais il faut aussi connaître deux valeurs remarquables qui interviennent souvent dans la pratique :

- la valeur $t_\alpha = 1,96$ donc le cas d'un seuil de 95%
- la valeur $t_\alpha = 2,58$ pour un seuil de 99%.

c. Le rayon de l'intervalle I_n est $\frac{0,588}{\sqrt{n}}$.

On cherche donc $n \geq 50$ (par la question b.) et tel que $\frac{0,588}{\sqrt{n}} \leq 0,05$.

$$\text{Or } \frac{0,588}{\sqrt{n}} \leq 0,05 \Leftrightarrow \frac{0,588}{0,05} \leq \sqrt{n} \Leftrightarrow 11,76 \leq \sqrt{n} \Leftrightarrow 11,76^2 \leq n.$$

Le rayon de I_n est donc inférieur ou égal à 0,05 pour $n \geq n_0$ avec $n_0 = 139$.

2. Calculons l'intervalle I_{n_0} : $I_{n_0} = \left[0,1 - \frac{0,588}{\sqrt{139}} ; 0,1 + \frac{0,588}{\sqrt{139}} \right] \approx [0,05 ; 0,15]$.

La règle de décision est la suivante :

On calcule la fréquence f de plages atteintes par les algues dans l'échantillon de 139 plages. Il y a alors deux cas :

- Si f appartient à l'intervalle I_{n_0} on ne rejette pas l'hypothèse $p = 0,1$.
- Si f n'appartient pas à l'intervalle I_{n_0} on rejette l'hypothèse $p = 0,1$ au seuil de décision de 5%.

Remarque

La démarche mise en œuvre ici est à bien connaître ; elle est énoncée dans le cours partie C page 438. Il est possible que l'on rejette à tort l'hypothèse ... la probabilité de le faire est environ égale à 0,05. Le seuil de décision correspond à ce risque.

3. On applique la règle énoncée précédemment avec $f = \frac{11}{139} \approx 0,079$.

Comme f appartient à l'intervalle I_{n_0} , on ne rejette pas l'hypothèse $p = 0,1$.