1. $F = \frac{X}{100}$.

2. $I = \left[0{,}6 - \frac{1}{\sqrt{100}} \,;\, 0{,}6 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] = [0{,}5 \,;\, 0{,}7]$.

On cherche $P(0{,}5 \leq F \leq 0{,}7)$, c'est-à-dire $P(50 \leq X \leq 70)$.

$P(50 \leq X \leq 70) = P(X \leq 70) - P(X < 50)$

$= P(X \leq 70) - P(X \leq 49)$

$\approx 0{,}9685$ à la calculatrice.

3.a. On sait d'après les résultats de l'exercice 1 que

$P(X \leq 49) < 0{,}025 < P(X \leq 50)$, c'est-à-dire

$P(F \leq \frac{49}{100}) < 0{,}025 < P(F \leq \frac{50}{100})$.

Le plus grand entier a tel que $P(F < \frac{a}{n}) < 0{,}025$ est donc $a = 50$.

Attention ! c'est $F < \frac{a}{n}$ et non $F \leq \frac{a}{n}$.

De même $P(X \geq 70) < 0{,}025 < P(X \geq 69)$ c'est-à-dire

$P(F \geq \frac{70}{100}) < 0{,}025 < P(F \geq \frac{69}{100})$.

Le plus petit entier b tel que $P(F > \frac{b}{n}) < 0{,}025$ est donc $b = 69$.

Attention ! c'est $F > \frac{b}{n}$ et non $F \geq \frac{b}{n}$.

On a donc pour intervalle $\left[\frac{a}{n} ; \frac{b}{n}\right] = [0{,}50 \,;\, 0{,}69]$.

b. On en déduit que $\mathrm{P}\left(\frac{a}{n} \leq \mathrm{F} \leq \frac{b}{n}\right) \geq 0{,}95$.

En effet $\mathrm{P}\left(\frac{a}{n} \leq \mathrm{F} \leq \frac{b}{n}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{F} < \frac{a}{n}\right) - \mathrm{P}(\mathrm{F} > \frac{b}{n})$.

Comme $\mathrm{P}\left(\mathrm{F} < \frac{a}{n}\right) < 0{,}025$ et $\mathrm{P}(\mathrm{F} > \frac{b}{n}) < 0{,}025$, on a

$\mathrm{P}\left(\mathrm{F} < \frac{a}{n}\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{F} > \frac{b}{n}\right) < 0{,}05$ donc $1 - \left(\mathrm{P}\left(\mathrm{F} < \frac{a}{n}\right) + \mathrm{P}\left(\mathrm{F} > \frac{b}{n}\right)\right) > 0{,}95$.

On a donc ici $\mathrm{P}(0{,}50 \leq \mathrm{F} \leq 0{,}69) \geq 0{,}95$.

Remarque :

Au-delà de la manipulation des inégalités, il faut bien comprendre la démarche et l'illustration graphique ci-dessous permet de mieux se représenter les choix précédents : on laisse de chaque côté du graphique une zone correspondant à une probabilité inférieure à 0,025, la plus grande possible ; donc au total on laisse une zone, en blanc sur le graphique, correspondant à une probabilité inférieure à 0,025 ×2 = 0,05.

L'autre partie du graphique, en bleu, correspond alors à une probabilité supérieure à 0,95.

Illustration graphique :