1. a. Pour avoir P(X < 1) = 0,16, on doit avoir T >1 et dans ce cas, X suivant la loi uniforme sur [0 ; T], P(X < 1) = P(0 ≤ X ≤ 1) = $\frac{1-0}{T-0} = \frac{1}{T}$.
Par conséquent T = 6,25 ans.

Remarque
Bien comprendre que si X suit une loi continue sur un intervalle contenant [0 ; 1], P(0 < X < 1) = P(0 ≤ X < 1) = P(0 < X ≤ 1) = P(0 ≤ X ≤ 1).

b. On cherche ici P(X ≥ 3). Comme X suit la loi uniforme sur [0 ; 6,25],
P(X ≥ 3) = P(3 ≤ X ≤ 6,25) = $\frac{6{,}25-3}{6{,}25-0} = \frac{3{,}25}{6{,}25} = 0{,}52$.

2. a. Soit $t \geq 0$.
X suivant la loi exponentielle de paramètre λ , on a
P(X < t) = P(0 ≤ X ≤ t) = $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$.
Sachant que P(X < 1) = 0,16, on en déduit que $1 - e^{-\lambda} = 0{,}16$
d'où $e^{-\lambda} = 0{,}84$ et par conséquent $-\lambda = \ln 0{,}84$
soit $\lambda = -\ln 0{,}84 \approx 0{,}174$ à 10^{-3} près.

b. On cherche à nouveau P(X ≥ 3).
Or P(X ≥ 3) = 1 – P(X < 3).
On connaît P(X < t) par la question précédente, d'où, pour $t = 3$:
P(X <3) = $1 - e^{-3\lambda} = 1 - e^{-3\times 0{,}175}$
Par conséquent P(X ≤ 3) = $e^{-3\times 0{,}175} \approx 0{,}592$ à 10^{-3} près.

c. On cherche la probabilité conditionnelle $P_{X\geq 3}(X \geq 5)$.
D'après la propriété de « durée de vie sans vieillissement » de la loi exponentielle (propriété 2 page 404), cette probabilité est égale à la probabilité que le téléviseur ne connaisse pas de panne pendant deux ans :
$P_{X\geq 3}(X \geq 5)$ = P(X ≥ 2) = 1 – P(X < 2) = 1 – $(1 - e^{-2\lambda}) = e^{-2\lambda} = e^{-0{,}35}$
soit, 0,705 à 10^{-3} près.

d. $P(X \leq t) = P(X \geq t) \Leftrightarrow P(X \leq t) = 1 - P(X < t) \Leftrightarrow P(X \leq t) = 1 - P(X \leq t)$

On cherche donc t tel que $P(X \leq t) = \frac{1}{2}$.

$P(X \leq t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda t = \ln\frac{1}{2}$

soit $t = -\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Avec $\lambda = 0{,}175$, on obtient $t = \frac{\ln 2}{0{,}175} \approx 3{,}96$ à 10^{-2} près, en années.

La durée de vie médiane est donc proche de 4 ans (à 1 mois près).

La durée de vie moyenne est E(X).

Par la propriété 3 page 404, $E(X) = \frac{1}{\lambda} \approx 5{,}71$ à 10^{-2} près, en années,

c'est-à-dire environ 5 ans et 9 mois (à 1 mois près).

Remarque

La formule donnant l'espérance de X en fonction de λ est à connaître.

La détermination de la valeur médiane est extrêmement classique donc, si le résultat n'est pas à connaître par cœur, il doit être cependant très familier, et la démarche est à bien maîtriser.