1. X est la variable aléatoire donnant le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche.

Le nombre de tirages que Clara doit s'attendre à effectuer pour obtenir une boule blanche est donc E(X).

Comme X est supposée suivre la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}01$, son espéance est donnée par E(X) = $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}01} = 100$.

Clara peut donc s'attendre à effectuer 100 tirages avant d'obtenir une boule blanche.

2. $P(X \leq k) = P(0 \leq X \leq k) = \int_0^k \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^k = 1 - e^{-\lambda k}$ soit

$P(X \leq k) = 1 - e^{-0{,}01k}$.

3. Calculons $P(X \geq 40)$:

$P(X \geq 40) = 1 - P(X < 40) = 1 - P(X \leq 40)$ car $P(X = 40) = 0$.

En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient
$P(X \geq 40) = 1 - (1 - e^{-0.01 \times 40}) = e^{-0{,}4} \approx 0{,}96$ à 0,01 près.

Calculons $P(40 \leq X \leq 60)$:

$P(40 \leq X \leq 60) = P(X \leq 60) - P(X \leq 40)$ $P(40 \leq X \leq 60)$

$= (1 - e^{-0{,}01 \times 60}) - (1 - e^{-0{,}01 \times 40})$ en utilisant le résultat de la question 2.

Donc $P(40 \leq X \leq 60) = e^{-0{,}4} - e^{-0{,}6} \approx 0{,}12$ à 0,01 près.

Remarque

On pourrait aussi calculer $P(40 \leq X \leq 60)$ comme $\int_{40}^{60} \lambda e^{-\lambda t} dt$.

4. On cherche la probabilité que X soit inférieur ou égal à 60, sachant qu'il est supérieur ou égal à 40 c'est-à-dire $P_{(X \geq 40)}(X \leq 60)$.

a. Avec la formule des probabilités conditionnelles :
Par définition d'une probabilité conditionnelle,

$$P_{(X \geq 40)}(X \leq 60) = \frac{P\big((X\leq 60)\cap(X\geq 40)\big)}{P(X\geq 40)} = \frac{P(40 \leq X \leq 60)}{P(X\geq 40)}.$$

En utilisant les résultats obtenus aux questions 3 et 4, on a donc

$$P_{(X \geq 40)}(X \leq 60) = \frac{e^{-0,4}-e^{-0,6}}{e^{-0,4}} = 1 - \frac{e^{-0,6}}{e^{-0,4}} = 1 - e^{-0,6} \times e^{0,4} = 1 - e^{-0,2}.$$

On a donc $P_{(X \geq 40)}(X \leq 60) \approx 0,18$ à 0,01 près.

b. $P_{(X \geq 40)}(X \leq 60) = 1 - P_{(X \geq 4)}(X > 60)$ ou encore

$P_{(X \geq 40)}(X \leq 60) = 1 - P_{(X \geq 4)}(X \geq 60)$.

Avec la propriété de « durée de vie sans vieillissement » (propriété 2 page 404), $P_{(X \geq 4)}(X \geq 60) = P(X \geq 20)$

Donc $P_{(X \geq 40)}(X \leq 60) = 1 - P(X \geq 20) = P(X < 20) = P(X \leq 20)$.

Par la question 2, on obtient alors

$$P_{(X \geq 40)}(X \leq 60) = 1 - e^{-0,01\times 20} = 1 - e^{-0,2}.$$