Chapitre 13 – Pour reprendre contact – Aide exercice 1 question B.1.

On répète ici trois fois le tirage d'une boule avec remise donc dans des conditions identiques et indépendantes. On reconnaîtra donc un schéma de Bernoulli (rappels page 476).

Reconnaître une loi binomiale

Énoncé

On lance cinq fois de suite, de façon indépendante, une pièce de monnaie bien équilibrée.
X est la variable aléatoire qui indique le nombre de « PILE » obtenus lors des 5 lancers.
Y est celle qui donne le rang du premier « PILE » obtenu (s'il n'apparaît pas, on prend 0).

1. Est-on ici en présence d'un schéma de Bernoulli ?

2. Étudier si les variables aléatoires X et Y suivent une loi binomiale.

Solution

1. Le « lancer d'une pièce de monnaie » – dont les issues « PILE » et « FACE » se produisent avec la même probabilité 0,5 – est une épreuve de Bernoulli, où le succès S : « obtenir PILE » a pour probabilité 0,5.
La répétition des 5 épreuves indépendantes est donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}5$.

2. a. Dans ce contexte de schéma de Bernoulli, la variable aléatoire X compte le nombre de succès S lors des 5 lancers. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}5$, dont la loi de probabilité est donnée par :
$P(X = k) = \binom{5}{k}(0{,}5)^k(0{,}5)^{5-k} = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \binom{5}{k} \times \frac{1}{32}$, pour k entier, $0 \leqslant k \leqslant 5$.

b. Dans ce même contexte, Y ne s'intéresse plus au nombre de succès obtenus au cours des 5 lancers, mais au rang du premier succès obtenu… Y ne suit donc pas une loi binomiale ou « loi du nombre de succès ».
D'ailleurs, à l'aide d'un arbre, on obtient : $P(Y = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ pour $1 \leqslant k \leqslant 5$ et $P(Y = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^5$.