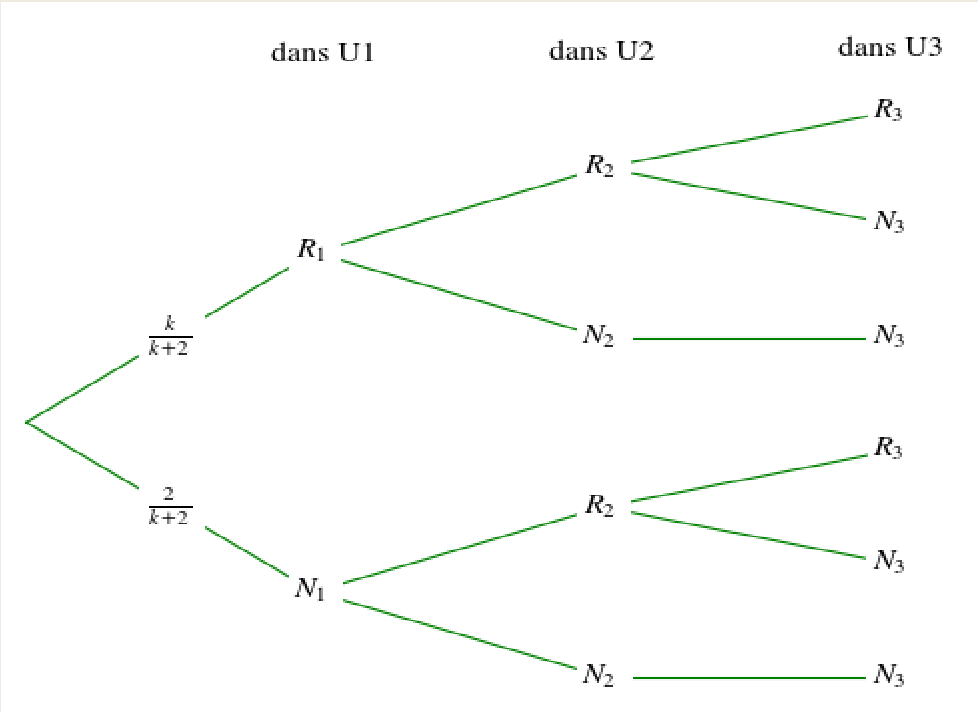
1. a. $P(R_1)$ est la probabilité de tirer une boule rouge dans l'urne 1.

La boule étant tirée au hasard, on est dans une situation d'équiprobabilité.

Il y a $k+2$ issues possibles (les $k+2$ boules de l'urne U_1) et k issues favorables à l'événement R_1 (les k boules rouges de l'urne U_1) donc $P(R_1) = \frac{k}{k+2}$.

De même, il y a 2 issues favorables à l'événement N_1 donc $P(N_1) = \frac{2}{k+2}$.

b. On construit l'arbre en reportant les probabilités que l'on vient de trouver :



Remarque

Lorsque N_2 est réalisé, l'urne U_3 ne contient que des boules noires, donc R_3 ne peut pas être réalisé. Il est inutile de mettre une branche partant de N_2 et allant vers R_3 dont la probabilité serait … nulle.

On calcule ensuite les probabilités qui manquent :

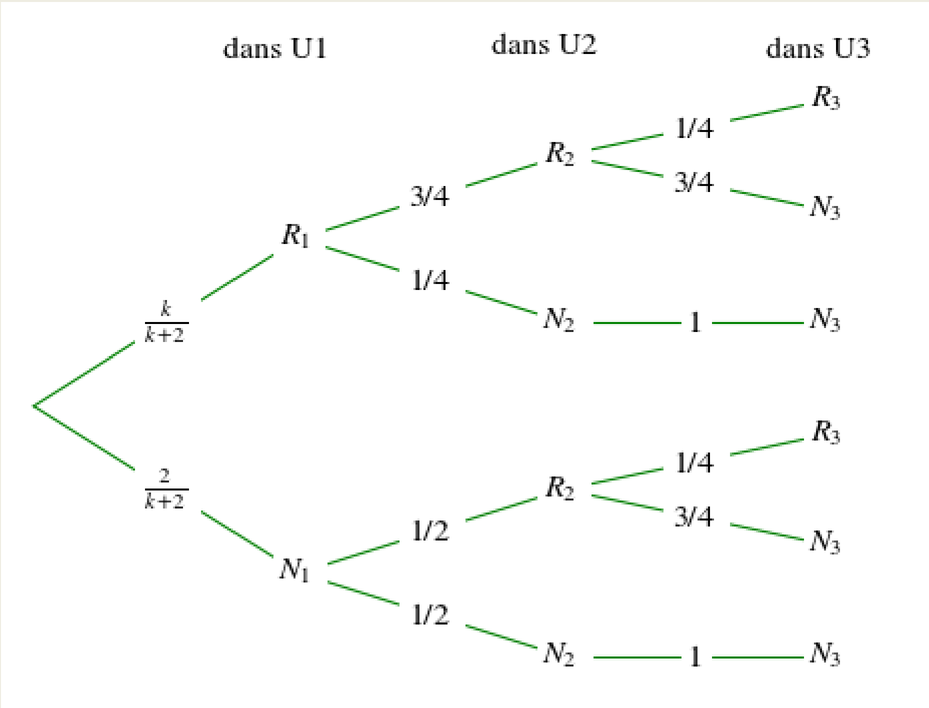
▪$P_{R_1}(R_2)$ est la probabilité de tirer une boule rouge dans U_2 sachant qu'une boule rouge a été tirée dans U_1 puis placée dans U_2. L'urne U_2 comporte donc 3 boules rouges et une boule noire. Le tirage étant équiprobable, $P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{4}$.

▪$P_{R_1}(N_2)$ est la probabilité de tirer une boule rouge dans U_2 sachant qu'une boule rouge a été tirée dans U_1 puis placée dans U_2. L'urne U_2 comporte donc 3 boules rouges et une boule noire. Le tirage étant équiprobable, $P_{R_1}(N_2) = \frac{1}{4}$.

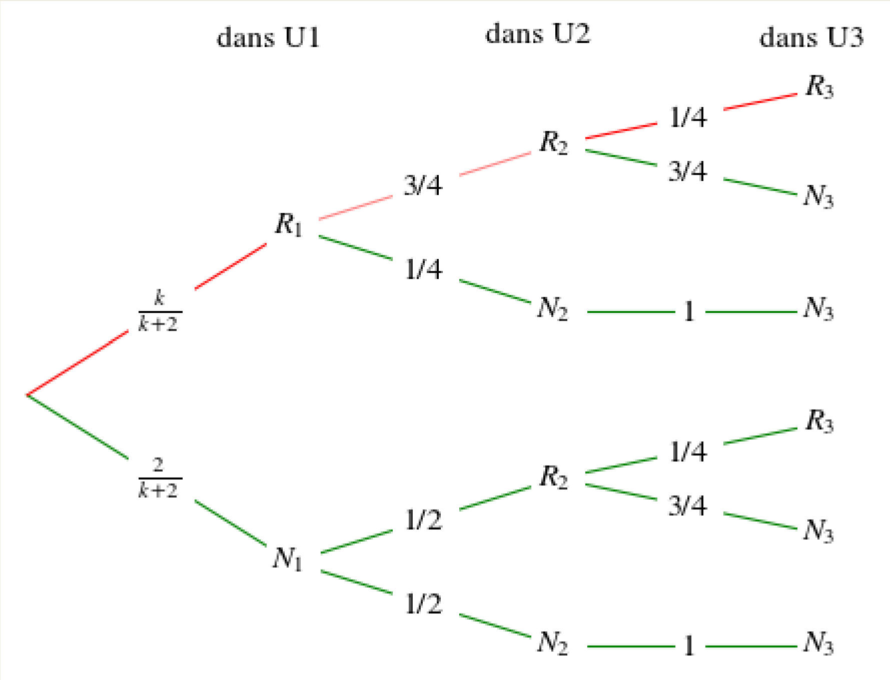
▪De la même façon, si N_1 a été réalisé, il y a 2 boules rouges dans U_2 et deux boules noires donc $P_{N_1}(R_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $P_{N_1}(N_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Lors du tirage dans U_3, on procède de la même façon en déterminant la composition de l'urne U_3 selon les chemins suivis.

On reporte ensuite ces probabilités sur l'arbre pour le compléter :

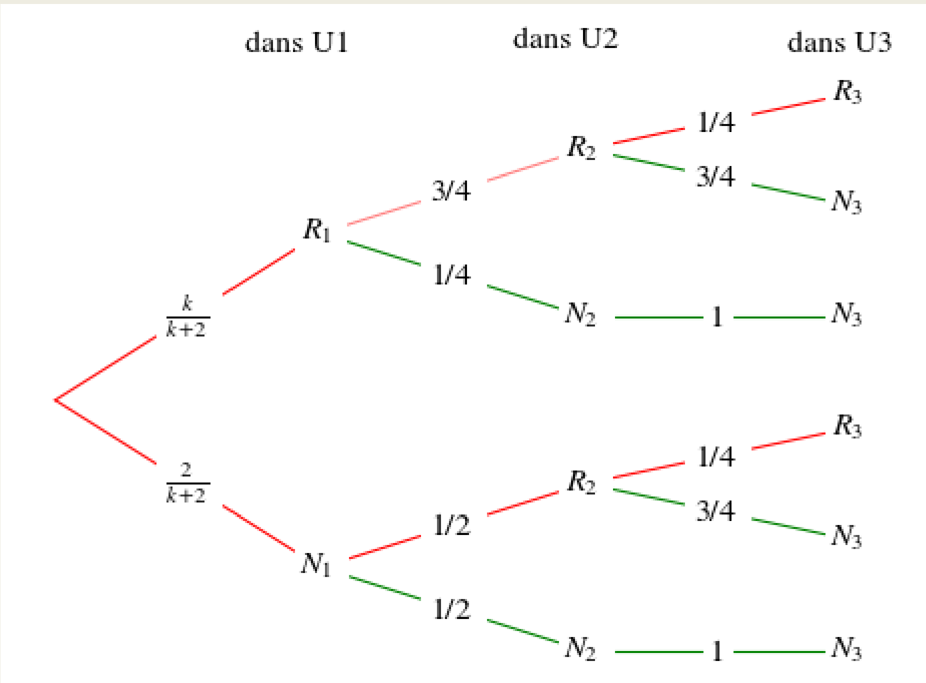


c. Le chemin conduisant à la réalisation de $R_1 \cap R_2 \cap R_3$ est le chemin représenté en rouge sur l'arbre ci-dessous :



On en déduit que $P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{k}{k+2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3k}{16(k+2)}$.

d. Les chemins conduisant à la réalisation de R_3 sont représentés en rouge sur l'arbre ci-dessous :



En appliquant les règles de fonctionnement d'un arbre pondéré, on obtient :

$P(R_3) = \left(\frac{k}{k+2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{2}{k+2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\right)$ d'où :

$P(R_3) = \frac{3k}{16(k+2)} + \frac{2}{8(k+2)} = \frac{3k}{16(k+2)} + \frac{2 \times 2}{2 \times 8(k+2)} = \frac{3k+4}{16(k+2)}.$

Remarque

Les calculs précédents correspondent à la décomposition de $P(R_3)$ en

$P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) + P(N_1 \cap R_2 \cap R_3)$.

e. Dire que les événements R_1 et R_3 sont indépendants, c'est dire que $P(R_1 \cap R_3) = P(R_1) \times P(R_3)$.

On a d'après les résultats des questions précédentes, d'une part, $P(R_1) \times P(R_3) = \frac{k}{k+2} \times \frac{3k+4}{16(k+2)} = \frac{k(3k+4)}{16(k+2)^2}$ et d'autre part,

$P(R_1 \cap R_3) = P(R_1 \cap R_2 \cap R_3) = \frac{3k}{16(k+2)} = \frac{3k}{16(k+2)}$.

L'égalité $P(R_1 \cap R_3) = P(R_1) \times P(R_3)$ équivaut donc à $\frac{k(3k+4)}{16(k+2)^2} = \frac{3k}{16(k+2)}$.

Sachant que $k \neq -2$, ceci équivaut à $k(3k+4) = 3k(k+2)$ donc,

k étant non nul, à $3k + 4 = 3(k+2)$ qui n'est jamais vérifié.

Par conséquent, $P(R_1 \cap R_3) \neq P(R_1) \times P(R_3)$ pour tout k de $\mathbb{N}^*$.

Les événements R_1 et R_3 ne sont pas indépendants.

Conseil

L'indépendance ne peut pas se décider d'après les définitions des différents événements, selon le sens courant en français. La comparaison de deux probabilités, conformément à la définition donnée page 376, est indispensable pour déterminer si deux événements sont indépendants ou non.

2. Dans cette question $k = 2$.

Remarque

On peut refaire un arbre en remplaçant k par 2 pour ne travailler qu'avec des valeurs numériques, ou utiliser l'arbre déjà réalisé et remplacer ensuite k par 2 pour terminer les calculs.

a. On cherche la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}_{\mathrm{R}_3}(\mathrm{R}_1)$.

Par définition, $\mathrm{P}_{\mathrm{R}_3}(\mathrm{R}_1) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{R}_3 \cap \mathrm{R}_1)}{\mathrm{P}(\mathrm{R}_3)}$.

D'après les résultats précédents, on obtient

$$\mathrm{P}_{\mathrm{R}_3}(\mathrm{R}_1) = \frac{\frac{3k}{16(k+2)}}{\frac{3k+4}{16(k+2)}} = \frac{3k}{16(k+2)} \times \frac{16(k+2)}{3k+4} = \frac{3k}{3k+4} = \frac{6}{10} = 0{,}6 \text{ puisque } k = 2.$$

b. L'événement I est réalisé si la boute tirée dans U_1 et dans U_3 sont de la même couleur, c'est-à-dire si $\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_3$ ou $\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_3$ sont réalisés.

Donc $\mathrm{P(I)} = \mathrm{P}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_3) + \mathrm{P}(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_3)$ ce qui revient à
$\mathrm{P(I)} = \mathrm{P}(\mathrm{R}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \mathrm{R}_3) + \mathrm{P}(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{R}_2 \cap \mathrm{N}_3) + \mathrm{P}(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \mathrm{N}_3)$

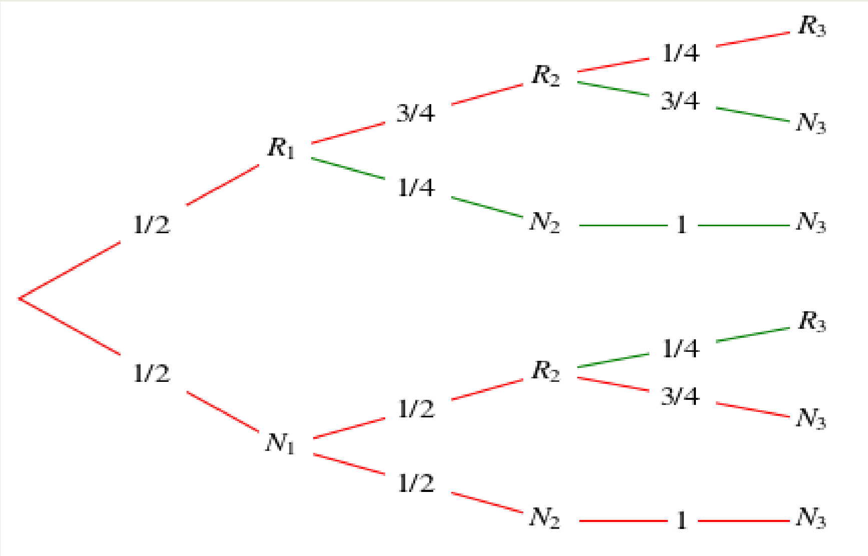
soit $\mathrm{P(I)} = \frac{3k}{16(k+2)} + \frac{2}{k+2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{k+2} \times \frac{1}{2} \times 1.$

Pour $k = 2$, on obtient :

$$\mathrm{P(I)} = \frac{6}{16\times 4} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \frac{17}{32}.$$

Remarque

On peut aussi effectuer le calcul de P(I) sur l'arbre directement en repérant les trois chemins pour lesquels la boule tirée de U_1 et de U_3 sont de la même couleur : $R_1 - R_2 - R_3$; $N_1 - R_2 - N_3$; $N_1 - N_2 - N_3$.



D'où $P(I) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{1}{4} = \frac{17}{32}$.